

## Concours normal d'agrégation de 1920

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 45-47

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_45\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__45_1)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

## CONCOURS NORMAL D'AGRÉGATION DE 1920.

---

### Composition de calcul différentiel et intégral (Deuxième partie).

SOLUTION PAR M. C.-E. TRAYNARD.

*Soient  $f(x, y)$  une fonction développable en série de Taylor, au point  $(x_0, y_0)$ ,  $\Delta f$  l'accroissement qu'elle prend quand  $x, y$  augmentent respectivement de  $\Delta x, \Delta y$  à partir des valeurs  $x_0, y_0$  et  $df$  sa différentielle*

*au point  $x_0, y_0$ .*

$$f'_{x_0} \Delta x + f'_{y_0} \Delta y$$

*1° En supposant que  $f'_{x_0}$  et  $f'_{y_0}$  ne sont pas nuls, le rapport  $\frac{\Delta f}{df}$  est en général déterminé. Montrer que sous des conditions très générales il tend vers l'unité quand  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent simultanément vers zéro.*

---

(<sup>1</sup>) Les notations abrégées pour les quotients sont dues à Glaisher.

2° Peut-il arriver cependant que  $\frac{\Delta f}{df}$  ait une limite finie différente de l'unité quand  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent simultanément vers zéro d'une façon spéciale?

3° Cette circonstance n'a-t-elle lieu que pour des fonctions  $f(x, y)$  très particulières?

(On suppose, bien entendu, dans 1°, 2°, 3°, que  $\Delta x, \Delta y$  convergent vers zéro de sorte que le dénominateur du rapport  $\frac{\Delta f}{df}$  tende vers zéro par valeurs non nulles.)

Pour simplifier les écritures, j'emploierai les notations de Monge pour les dérivées. La fonction  $f(x, y)$  étant développable en série de Taylor, j'ai

$$\Delta f = p \Delta x + q \Delta y + \frac{r \Delta x^2 + 2s \Delta x \Delta y + t \Delta y^2}{2} + \dots,$$

$$\frac{\Delta f}{df} = 1 + \frac{r \Delta x^2 + 2s \Delta x \Delta y + t \Delta y^2}{2(p \Delta x + q \Delta y)} + \dots$$

Il apparaît à première vue que le rapport

$$v = \frac{r \Delta x^2 + 2s \Delta x \Delta y + t \Delta y^2}{2(p \Delta x + q \Delta y)}$$

tend vers zéro dans les conditions de l'énoncé; les coefficients du numérateur en effet sont finis, ceux du dénominateur ne sont pas nuls, soit  $A$  un nombre positif supérieur aux premiers,  $a$  une borne inférieure, supposée non nulle, de  $\frac{2|p \Delta x + q \Delta y|}{|\Delta x| + |\Delta y|}$ , la valeur absolue de  $v$  est inférieure à  $\frac{A}{a} (|\Delta x| + |\Delta y|)$  quantité qui tend vers zéro en même temps que  $\Delta x$  et  $\Delta y$ .

*A fortiori*, l'ensemble des termes suivant  $v$  tend vers zéro et le rapport  $\frac{\Delta f}{df}$  tend vers 1, sous la seule condition très générale d'existence de la borne inférieure non nulle  $a$ .

Pour aller plus loin, on peut faire le raisonnement suivant.

Je transforme l'expression de  $v$  en mettant  $\Delta x$  en facteur

$$v = \Delta x \frac{r + 2s \frac{\Delta y}{\Delta x} + t \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}{2 \left( p + q \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)}$$

et je pose  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u$ ; d'où

$$\Delta x = \frac{2v(p + qu)}{r + 2su + tu^2}, \quad \Delta y = \frac{2uv(p + qu)}{r + 2su + tu^2}.$$

On voit sur ces expressions que  $\Delta x$  et  $\Delta y$  peuvent tendre vers zéro de deux façons : quand  $v$  tend vers zéro et quand  $p + qu$  tend vers zéro.

Le cas de  $v$  tendant vers zéro est celui qui a été étudié plus haut; on voit qu'il n'exige aucune condition sur la façon dont  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent vers zéro. Le cas de  $p + qu$  tendant vers zéro a échappé à la précédente analyse; aucune condition n'est imposée à  $v$  qui peut tendre vers une limite arbitraire, ce qui s'explique aisément en remarquant que

$$p \Delta x + q \Delta y = \frac{2v(p + qu)^2}{r + 2su + tu^2},$$

c'est-à-dire, si je puis m'exprimer ainsi, que  $p \Delta x + q \Delta y$  est plus nul lorsque  $p + qu$  tend vers zéro que lorsque  $v$  tend vers zéro (<sup>1</sup>).

Géométriquement, le cas de  $v$  tendant vers zéro est celui du point  $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$  tendant vers le point  $x_0, y_0$  sur un chemin quelconque; le cas de  $p + qu$  tendant vers zéro correspond à un chemin tangent à la droite

$$Z = f(x_0, y_0), \quad p(X - x_0) + q(Y - y_0) = 0.$$

En résumé et pour répondre aux questions posées par l'énoncé :

1° En général et sous les seules conditions de l'énoncé, le rapport  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  tend vers 1 quand  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent vers zéro.

2° Ce rapport tend vers toute limite  $1 + k$  donnée à l'avance lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent vers zéro, le point  $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$  suivant un certain chemin tangent à la droite

$$Z = f(x_0, y_0), \quad p(X - x_0) + q(Y - y_0) = 0$$

et qui dépend de la quantité  $k$ .

3° Ces circonstances se présentent pour toutes les fonctions  $f(x, y)$ .

(<sup>1</sup>) Il est facile de voir que les quantités qui suivent la fraction  $v$  ont toujours pour limite zéro.