

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 407-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__407_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

333.

(1856, p. 243; 1916, p. 192).

Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n , quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

SOLUTION

Par N. ABRAMESCO.

On sait (SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, édition 1890, p. 269, « Sur l'ordre des systèmes d'équations soumis à des restrictions ») que l , m , n , r étant les degrés des quatre équations à trois inconnues, supposant qu'une quantité quelconque figure dans les coefficients des équations aux degrés λ , μ , ν , ρ respectivement, cette quantité entrera dans le résultant au degré

$$\lambda mn r + \mu n r l + \nu r l m + \rho l m n.$$

1° Considérons la développable engendrée par les tangentes à la courbe d'intersection des surfaces $U = 0$, $V = 0$, de degrés m et n . (x_1, y_1, z_1, t_1) étant un point de cette courbe, l'équation de la développable s'obtient en éliminant x_1, y_1, z_1, t_1 entre les équations

$$U(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0, \quad V(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0,$$

et

$$x \frac{\partial U}{\partial x_1} + y \frac{\partial U}{\partial y_1} + z \frac{\partial U}{\partial z_1} + t \frac{\partial U}{\partial t_1} = 0, \quad x \frac{\partial V}{\partial x_1} + y \frac{\partial V}{\partial y_1} + z \frac{\partial V}{\partial z_1} + t \frac{\partial V}{\partial t_1} = 0,$$

de degrés $m, n, m-1, n-1$ par rapport à x_1, y_1, z_1, t_1 et 0, 0, 1, 1 par rapport à x, y, z, t ; donc le résultant, ou l'équation de la développable engendrée par les tangentes, est par rapport à x, y, z de degré

$$mn(n-1) + mn(m-1) = mn(m+n-2).$$

2° La développable engendrée par la droite polaire (axe du plan osculateur). Cette droite est la caractéristique du plan normal à la courbe

$$(I) \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

$$A = \frac{D(U, V)}{D(y_1, z_1)}, \quad B = \frac{D(U, V)}{D(z_1, x_1)}, \quad C = \frac{D(U, V)}{D(x_1, y_1)},$$

$$\frac{D(U, V)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Différentiant (1), on trouve

$$(2) \quad \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial A}{\partial z_1} dz_1 \right) (x - x_1) - A dx_1 + \dots = 0.$$

Or

$$\frac{dx_1}{D(U, V)} = \frac{dy_1}{D(U, V)} = \frac{dz_1}{D(U, V)},$$

$$\frac{dx_1}{D(y_1, z_1)} = \frac{dy_1}{D(z_1, x_1)} = \frac{dz_1}{D(x_1, y_1)},$$

et donc (2) devient

$$(3) \quad \left(A \frac{\partial A}{\partial x_1} + B \frac{\partial A}{\partial y_1} + C \frac{\partial A}{\partial z_1} \right) (x - x_1) - A^2 + \dots = 0.$$

Il faut éliminer x_1, y_1, z_1 entre $U(x_1, y_1, z_1) = 0, V(x_1, y_1, z_1) = 0$, (1) et (3) qui sont respectivement de degrés $m, n, m + n - 1, 2m + 2n - 4$ par rapport à x_1, y_1, z_1 et de degrés 0, 0, 1, 1 par rapport à x, y, z ; donc le degré de la développable engendrée par la droite polaire est

$$mn(2m + 2n - 4) + mn(m + n - 1) = mn(3m + 3n - 5).$$

3° Surface formée par les normales principales. Cette droite est à l'intersection du plan normal (1) et du plan osculateur. Or, on sait (SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 2^e partie, p. 124) que l'équation du plan osculateur en un point à la courbe d'intersection des surfaces $U = 0, V = 0$, de degrés m et n , a pour équation

$$(4) \quad \frac{S'}{(n-1)^2} \left(x \frac{\partial U}{\partial x_1} + y \frac{\partial U}{\partial y_1} + z \frac{\partial U}{\partial z_1} + t \frac{\partial U}{\partial t_1} \right) = \frac{S}{(m-1)^2} \left(x \frac{\partial V}{\partial x_1} + y \frac{\partial V}{\partial y_1} + z \frac{\partial V}{\partial z_1} + t \frac{\partial V}{\partial t_1} \right),$$

où

$$S = \begin{vmatrix} a & h & g & l & \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ h & b & f & m & \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ g & f & c & n & \frac{\partial V}{\partial z_1} \\ l & m & n & d & \frac{\partial V}{\partial t_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial y_1} & \frac{\partial V}{\partial z_1} & \frac{\partial V}{\partial t_1} & 0 \end{vmatrix},$$

$$a = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad b = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad c = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad d = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad f = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z},$$

$$g = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \quad h = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad l = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}, \quad m = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t}, \quad n = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t}.$$

et S' le déterminant analogue pour la surface V . L'équation (4) est, par rapport à x_1, y_1, z_1 , de degré

$$(n-1) + 3(m-2) + 2(n-1) = 3(m+n-3).$$

L'équation de la surface s'obtient en éliminant x_1, y_1, z_1 entre

$$U(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad V(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

(1) et (4) qui sont, par rapport à x_1, y_1, z_1 , de degrés $m, n, m+n-1, 3(m+n-3)$ et, par rapport à x, y, z , de degrés 0, 0, 1, 1; son degré est donc

$$3mn(m+n-3) + mn(m+n-1) = 2mn(2m+2n-5).$$

805.

(1867, p. 188; 1917, p. 156.)

On donne deux surfaces (S), (S'), la première fixe, l'autre se rapprochant indéfiniment de celle-ci. D'un point A de (S) et dans le plan tangent à cette surface on mène des tangentes à (S'). Quelle est la limite des positions de ces tangentes lorsque (S') tend vers (S), de façon que le point où (S') est touchée à chaque instant par un plan parallèle au plan tangent mené par le point A à (S) décrive une ligne qui coupe cette surface sous un angle fini? O. BONNET.

SOLUTION

Par N. ABRAMESCO.

A étant l'origine O des coordonnées rectangulaires, le plan tangent en A à (S) le plan xOy , soit

$$(1) \quad z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varphi_3 + \dots$$

l'équation de la surface (S). Supposons que la surface variable (S') est représentée par l'équation

$$z = F(x, y),$$

variable avec λ . Soit $A'(\xi, \eta, \zeta)$ le point de (S') où le plan tangent est parallèle au plan xOy . On a

$$\zeta = F(\xi, \eta, \lambda), \quad F'_\xi(\xi, \eta, \lambda) = 0, \quad F'_\eta(\xi, \eta, \lambda) = 0.$$

D'où

$$\xi = \varphi(\lambda), \quad \eta = \psi(\lambda), \quad \zeta = F[\varphi(\lambda), \psi(\lambda), \lambda].$$

La condition que la courbe $\xi = \varphi(\lambda), \eta = \psi(\lambda), \zeta = F(\xi, \eta, \lambda)$ coupe la surface (S) sous un angle fini exprime que l'angle de la tangente en O à

cette courbe et la normale à (S) en O est fini, ou que $\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$. Or,

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda},$$

et comme $\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$, il en résulte $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$.

L'équation de la surface (S') peut s'écrire

$$z = F(\xi, \eta, \lambda) + \frac{1}{1.2} \left[(x - \xi)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2(x - \xi)(y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + (y - \eta)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] + \dots,$$

et quand $\lambda \rightarrow 0$, on a $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, $F(\xi, \eta, \lambda) \rightarrow 0$, et z prend la forme (1).

La courbe d'intersection de (S') avec le plan tangent en O à (S), a pour équation

$$(2) \quad F(x, y, \lambda) = F(\xi, \eta, \lambda) + \frac{1}{1.2} \times \left[(x - \xi)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2(x - \xi)(y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + (y - \eta)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] + \dots = 0.$$

Les tangentes considérées sont les tangentes menées de O à la courbe (2) et les coordonnées de leurs points de contact sont données par les équations (2) et

$$x \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial x} + y \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0,$$

ou

$$(3) \quad \begin{aligned} & x \left[(x - \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + (y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \dots \right] \\ & + y \left[(x - \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + (y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

La limite de ces tangentes est connue si l'on sait la limite de ces points pour $\lambda \rightarrow 0$.

Comme $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$, ces points sont à l'intersection des courbes

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right)_0 + 2xy \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right)_0 + y^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)_0 \right] + \dots = 0, \\ x \left[x \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right)_0 + y \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right)_0 + \dots \right] \\ + y \left[x \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right)_0 + y \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)_0 + \dots \right] = 0 \end{cases}$$

et donc les tangentes considérées tendent vers les tangentes menées de

l'origine O (le point A) à la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan tangent en O à cette surface.

Si l'on avait $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$, alors il faudrait que les points de contact soient communs aux trois courbes, (4) et $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$, ce qui n'est pas toujours possible.

2359.

(1918, p. 119.)

On considère les cubiques circulaires Γ rencontrées dans la deuxième partie de la composition de géométrie analytique de l'École Polytechnique en 1917, savoir celles que définit l'équation ⁽¹⁾

$$x(x^2 + y^2) + (h^2 - a^2)x - 2ahy = 0,$$

où a est regardé comme fixe et h comme variable.

On appelle H et H' les points de contact de chaque cubique Γ avec ses tangentes parallèles à Oy, I et I' ses points de contact avec ses tangentes parallèles à Ox, C et C' ses centres de courbure répondant à H et H'. On demande :

1° *De trouver le lieu des points I et I' et de déterminer, en particulier, les points de ce lieu où la tangente est parallèle à Oy en faisant voir comment ces derniers points sont liés aux points H et H' correspondants;*

2° *De trouver le lieu des points C et C' et de donner la construction géométrique qui permet de déduire chaque point C du point H correspondant.*

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

1° Si l'on pose

$$(1) \quad f(x, y) = x(x^2 + y^2) + (h^2 - a^2)x - 2ahy = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + y^2 + h^2 - a^2, \\ f'_y &= 2(xy - ah). \end{aligned}$$

Les points I et I' où la tangente est parallèle à Ox sont donc donnés par l'ensemble des équations (1) et

$$(2) \quad 3x^2 + y^2 + h^2 - a^2 = 0.$$

(1) Voir N. A., 1917, p. 254, ce qui permet de rectifier une faute de signe dans l'énoncé publié en 1918.

Retranchant de (1) cette dernière équation multipliée par x , on en déduit

$$(3) \quad x^3 + ahx = 0,$$

et l'élimination de h entre (2) et (3) donne le lieu cherché

$$(4) \quad \varphi(x, y) = x^6 + a^2 y^4 + 3 a^2 x^2 y^2 - a^4 y^2 = 0,$$

courbe fermée, symétrique par rapport à Ox et Oy , et passant par O où elle présente un double point d'inflexion (méplat) avec Ox pour tangente.

Les sommets S et S' de cette courbe, situés sur Oy , sont donnés par $y = \pm a$. La tangente y est parallèle à Ox .

Les points T de cette courbe, où la tangente est parallèle à Oy , sont donnés par

$$(5) \quad \varphi'_y = 2 a^2 y (2 y^2 + 3 x^2 - a^2) = 0.$$

L'élimination de y^2 entre (4) et (5), qui est immédiate, donne

$$4 x^6 - a^2 (a^2 - 3 x^2)^2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(x^2 - a^2)^2 (4 x^2 - a^2) = 0.$$

La racine double en x^2 donne des points de contact imaginaires. Les seules solutions réelles sont fournies par

$$4 x^2 - a^2 = 0,$$

d'où

$$x = \pm \frac{a}{2}.$$

Cette valeur portée dans (5) donne

$$y = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Pour avoir la valeur correspondante de h , il suffit de porter ces valeurs de x et y dans (3), d'où l'on déduit

$$h = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Or, les points de contact H et H' de la cubique circulaire répondant à chaque valeur de h , avec les tangentes parallèles à Oy ($x = \pm a$), ont précisément pour ordonnée h ⁽¹⁾. Il en résulte que *chaque point T est le milieu de la distance du point H correspondant à Oy*.

Remarque. — La courbe (4) se compose en somme de deux ovales symétriques chacun par rapport à Oy , et l'un de l'autre par rapport à Ox ,

(1) *Loc. cit.*

dont le rayon de courbure, minimum au sommet S, croît d'une manière continue jusqu'en O où ce rayon de courbure devient infini.

Le rayon de courbure en S, où la tangente est parallèle à Ox, est d'ailleurs donné par

$$r = - \frac{\varphi'_y}{\varphi''_{x^2}}, \quad \text{avec } x = 0, \quad y = a.$$

Un calcul facile montre que

$$r = - \frac{a}{3}.$$

On peut aussi aisément calculer le rayon de courbure en T, où la tangente est parallèle à Oy, donné par

$$r = - \frac{\varphi'_x}{\varphi''_{y^2}}, \quad \text{avec } x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

On trouve

$$r = - \frac{9a}{16}.$$

2^a Quant à la courbe (1), son rayon de courbure au point H, où la tangente est parallèle à Oy, est donné par

$$r = - \frac{f'_x}{f''_{y^2}}, \quad \text{avec } x = a, \quad y = h.$$

Le calcul donne immédiatement

$$r = - \frac{a^2 + h^2}{a}.$$

Et, comme $a^2 + h^2$ est le carré de OH, cette formule montre que l'angle COH est droit. Il en résulte que le lieu du point C a pour équation

$$x = - \frac{y^2}{a},$$

parabole de sommet O et d'axe Ox ayant pour paramètre $\frac{a}{2}$.

Autre solution de M. LONG.