Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 407-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__407_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

333.

(1856, p. 243; 1916, p. 192).

Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n, quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

SOLUTION

Par N. ABRAMESCO.

On sait (SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, édition 1890, p. 269, « Sur l'ordre des systèmes d'équations soumis à des restrictions ») que l, m, n, r étant les degrés des quatre équations à trois inconnues, supposant qu'une quantité quelconque figure dans les coefficients des équations aux degrés λ, μ, ν, ρ respectivement, cette quantité entrera dans le résultant au degré

$$\lambda mnr + \mu nrl + \nu rlm + \rho\, lmn.$$

1° Considérons la développable engendrée par les tangentes à la courbe d'intersection des surfaces $U = 0$, $V = 0$, de degrés m et n. (x_1, y_1, z_1, t_1) étant un point de cette courbe, l'équation de la développable s'obtient en éliminant x_1, y_1, z_1, t_1 entre les équations

$$U(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0, \qquad V(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0,$$

et

$$x\frac{\partial U}{\partial x_1} + y\frac{\partial U}{\partial y_1} + z\frac{\partial U}{\partial z_1} + t\frac{\partial U}{\partial t_1} = 0, \qquad x\frac{\partial V}{\partial x_1} + y\frac{\partial V}{\partial y_1} + z\frac{\partial V}{\partial z_1} + t\frac{\partial V}{\partial t_1} = 0,$$

de degrés m, n, $m-1$, $n-1$ par rapport à x_1, y_1, z_1, t_1 et 0, 0, 1, 1 par rapport à x, y, z, t; donc le résultant, ou l'équation de la développable engendrée par les tangentes, est par rapport à x, y, z de degré

$$mn(n-1) + mn(m-1) = mn(m+n-2).$$

2° La développable engendrée par la droite polaire (axe du plan osculateur). Cette droite est la caractéristique du plan normal à la courbe

$$(1) \qquad A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0,$$

$$A = \frac{D(U, V)}{D(y_1, z_1)}, \qquad B = \frac{D(U, V)}{D(z_1, x_1)}, \qquad C = \frac{D(U, V)}{D(x_1, y_1)},$$

$$\frac{D(U, V)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Différentiant (1), on trouve

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial A}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial A}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial A}{\partial z_1}dz_1\right)(x-x_1)-A\,dx_1+\ldots=0.$$

Or

$$\frac{dx_1}{\dfrac{D(U,V)}{D(y_1,z_1)}}=\frac{dy_1}{\dfrac{D(U,V)}{D(z_1,x_1)}}=\frac{dz_1}{\dfrac{D(U,V)}{D(x_1,y_1)}},$$

et donc (2) devient

$$(3)\qquad \left(A\frac{\partial A}{\partial x_1}+B\frac{\partial A}{\partial y_1}+C\frac{\partial A}{\partial z_1}\right)(x-x_1)-A^2+\ldots=0.$$

Il faut éliminer x_1, y_1, z_1 entre $U(x_1, y_1, z_1)=0$, $V(x_1, y_1, z_1)=0$, (1) et (3) qui sont respectivement de degrés m, n, $m+n-1$, $2m+2n-4$ par rapport à x_1, y_1 z_1 et de dégrés 0, 0, 1, 1 par rapport à x, y, z; donc le degré de la développable engendrée par la droite polaire est

$$mn(2m+2n-4)+mn(m+n-1)=mn(3m+3n-5).$$

3° Surface formée par les normales principales. Cette droite est à l'intersection du plan normal (1) et du plan osculateur. Or, on sait (Salmon, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 2ᵉ partie, p. 124) que l'équation du plan osculateur en un point à la courbe d'intersection des surfaces $U=0$, $V=0$, de degrés m et n, a pour équation

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\frac{S'}{(n-1)^2}\left(x\frac{\partial U}{\partial x_1}+y\frac{\partial U}{\partial y_1}+z\frac{\partial U}{\partial z_1}+t\frac{\partial U}{\partial t_1}\right)\\ &=\frac{S}{(m-1)^2}\left(x\frac{\partial V}{\partial x_1}+y\frac{\partial V}{\partial y_1}+z\frac{\partial V}{\partial z_1}+t\frac{\partial V}{\partial t_1}\right),\end{aligned}$$

où

$$S=\begin{vmatrix} a & h & g & l & \dfrac{\partial V}{\partial x_1}\\ h & b & f & m & \dfrac{\partial V}{\partial y_1}\\ g & f & c & n & \dfrac{\partial V}{\partial z_1}\\ l & m & n & d & \dfrac{\partial V}{\partial t_1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V}{\partial y_1} & \dfrac{\partial V}{\partial z_1} & \dfrac{\partial V}{\partial t_1} & 0\end{vmatrix},$$

$$a=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad b=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad c=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},\quad d=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\quad f=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z},$$

$$g=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x},\quad h=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y},\quad l=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t},\quad m=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t},\quad n=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}$$

et S′ le déterminant analogue pour la surface V. L'équation (4) est, par rapport à x_1, y_1, z_1, de degré

$$(n-1)+3(m-2)+2(n-1)=3(m+n-3).$$

L'équation de la surface s'obtient en éliminant x_1, y_1, z_1 entre

$$U(x_1, y_1, z_1)=0, \qquad V(x_1, y_1, z_1)=0,$$

(1) et (4) qui sont, par rapport à x_1, y_1, z_1, de degrés m, n, $m+n-1$, $3(m+n-3)$ et, par rapport à x, y, z, de degrés 0, 0, 1, 1; son degré est donc

$$3mn(m+n-3)+mn(m+n-1)=2mn(2m+2n-5).$$

805.

(1867, p. 188; 1917, p. 156.)

On donne deux surfaces (S), (S′), *la première fixe, l'autre se rapprochant indéfiniment de celle-ci. D'un point* A *de* (S) *et dans le plan tangent à cette surface on mène des tangentes à* (S′). *Quelle est la limite des positions de ces tangentes lorsque* (S′) *tend vers* (S), *de façon que le point où* (S′) *est touchée à chaque instant par un plan parallèle au plan tangent mené par le point* A *à* (S) *décrive une ligne qui coupe cette surface sous un angle fini?* O. Bonnet.

Solution
Par N. Abramesco.

A étant l'origine O des coordonnées rectangulaires, le plan tangent en A à (S) le plan xOy, soit

$$(1) \qquad z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varphi_3+\ldots$$

l'équation de la surface (S). Supposons que la surface variable (S′) est représentée par l'équation

$$z=F(x, y),$$

variable avec λ. Soit $A'(\xi, \eta, \zeta)$ le point de (S′) où le plan tangent est parallèle au plan xOy. On a

$$\zeta=F(\xi, \eta, \lambda), \qquad F'_\xi(\xi, \eta, \lambda)=0, \qquad F'_\eta(\xi, \eta, \lambda)=0.$$

D'où

$$\xi=\varphi(\lambda), \qquad \eta=\psi(\lambda), \qquad \zeta=F[\varphi(\lambda), \psi(\lambda), \lambda].$$

La condition que la courbe $\xi=\varphi(\lambda)$, $\eta=\psi(\lambda)$, $\zeta=F(\xi, \eta, \lambda)$ coupe la surface (S) sous un angle fini exprime que l'angle de la tangente en O à cette courbe et la normale à (S) en O est fini, ou que $\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$. Or,

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda},$$

et comme $\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$, il en résulte $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$.

L'équation de la surface (S') peut s'écrire

$$z = F(\xi, \eta, \lambda) + \frac{1}{1.2}\left[(x-\xi)^2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2(x-\xi)(y-\eta)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + (y-\eta)^2\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right] + \ldots,$$

et quand $\lambda \to 0$, on a $\xi \to 0$, $\eta \to 0$, $F(\xi, \eta, \lambda) \to 0$, et z prend la forme (1).

La courbe d'intersection de (S') avec le plan tangent en O à (S), a pour équation

$$(2)\quad F(x, y, \lambda) \equiv F(\xi, \eta, \lambda) + \frac{1}{1.2} \times \left[(x-\xi)^2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2(x-\xi)(y-\eta)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + (y-\eta)^2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right] + \ldots = 0.$$

Les tangentes considérées sont les tangentes menées de O à la courbe (2) et les coordonnées de leurs points de contact sont données par les équations (2) et

$$x\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial x} + y\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0,$$

ou

$$(3)\quad x\left[(x-\xi)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + (y-\eta)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + \ldots\right] + y\left[(x-\xi)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + (y-\eta)\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \ldots\right] = 0.$$

La limite de ces tangentes est connue si l'on sait la limite de ces points pour $\lambda \to 0$.

Comme $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$, ces points sont à l'intersection des courbes

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right)_0 + 2xy\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)_0 + y^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_0\right] + \ldots = 0, \\ x\left[x\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right)_0 + y\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)_0 + \ldots\right] \\ + y\left[x\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)_0 + y\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_0 + \ldots\right] = 0 \end{array}\right.$$

et donc les tangentes considérées tendent vers les tangentes menées de l'origine O (le point A) à la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan tangent en O à cette surface.

Si l'on avait $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$, alors il faudrait que les points de contact soient communs aux trois courbes, (4) et $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$, ce qui n'est pas toujours possible.

2359.

(1918, p. 119.)

On considère les cubiques circulaires Γ *rencontrées dans la deuxième partie de la composition de géométrie analytique de l'École Polytechnique en* 1917, *savoir celles que définit l'équation* [1]

$$x(x^2+y^2)+(h^2-a^2)x-2ahy=0,$$

où a *est regardé comme fixe et* h *comme variable.*

On appelle H *et* H' *les points de contact de chaque cubique* Γ *avec ses tangentes parallèles à* Oy, I *et* I', *ses points de contact avec ses tangentes parallèles à* Ox, C *et* C' *ses centres de courbure répondant à* H *et* H'. *On demande :*

1° *De trouver le lieu des points* I *et* I' *et de déterminer, en particulier, les points de ce lieu où la tangente est parallèle à* Oy *en faisant voir comment ces derniers points sont liés aux points* H *et* H' *correspondants;*

2° *De trouver le lieu des points* C *et* C' *et de donner la construction géométrique qui permet de déduire chaque point* C *du point* H *correspondant.*

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

1° Si l'on pose

$$(1)\qquad f(x,y)=x(x^2+y^2)+(h^2-a^2)x-2ahy=0,$$

on a

$$f'_x=3x^2+y^2+h^2-a^2,$$
$$f'_y=2(xy-ah).$$

Les points I et I' où la tangente est parallèle à Ox sont donc donnés par l'ensemble des équations (1) et

$$(2)\qquad 3x^2+y^2+h^2-a^2=0.$$

---

(1) Voir *N. A.*, 1917, p. 254, ce qui permet de rectifier une faute de signe dans l'énoncé publié en 1918.

Retranchant de (1) cette dernière équation multipliée par x, on en déduit

$$x^3 + ahy = 0, \tag{3}$$

et l'élimination de h entre (2) et (3) donne le lieu cherché

$$\varphi(x, y) = x^6 + a^2y^4 + 3a^2x^2y^2 - a^4y^2 = 0, \tag{4}$$

courbe fermée, symétrique par rapport à Ox et Oy, et passant par O où elle présente un double point d'inflexion (méplat) avec Ox pour tangente.

Les sommets S et S′ de cette courbe, situés sur Oy, sont donnés par $y = \pm a$. La tangente y est parallèle à Ox.

Les points T de cette courbe, où la tangente est parallèle à Oy, sont donnés par

$$\varphi'_y = 2a^2y(2y^2 + 3x^2 - a^2) = 0. \tag{5}$$

L'élimination de y^2 entre (4) et (5), qui est immédiate, donne

$$4x^6 - a^2(a^2 - 3x^2)^2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(x^2 - a^2)^2(4x^2 - a^2) = 0.$$

La racine double en x^2 donne des points de contact imaginaires. Les seules solutions réelles sont fournies par

$$4x^2 - a^2 = 0,$$

d'où

$$x = \pm \frac{a}{2}.$$

Cette valeur portée dans (5) donne

$$y = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Pour avoir la valeur correspondante de h, il suffit de porter ces valeurs de x et y dans (3), d'où l'on déduit

$$h = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Or, les points de contact H et H′ de la cubique circulaire répondant à chaque valeur de h, avec les tangentes parallèles à Oy ($x = \pm a$), ont précisément pour ordonnée h [1]. Il en résulte que *chaque point* T *est le milieu de la distance du point* H *correspondant à* Oy.

Remarque. — La courbe (4) se compose en somme de deux ovales symétriques chacun par rapport à Oy, et l'un de l'autre par rapport à Ox,

---

[1] *Loc. cit.*

dont le rayon de courbure, minimum au sommet S, croît d'une manière continue jusqu'en O où ce rayon de courbure devient infini.

Le rayon de courbure en S, où la tangente est parallèle à Ox, est d'ailleurs donné par

$$r = -\frac{\varphi'_y}{\varphi''_{x^2}}, \qquad \text{avec } x = 0, \qquad y = a.$$

Un calcul facile montre que

$$r = -\frac{a}{3}.$$

On peut aussi aisément calculer le rayon de courbure en T, où la tangente est parallèle à Oy, donné par

$$r = -\frac{\varphi'_x}{\varphi''_{y^2}}, \qquad \text{avec } x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

On trouve

$$r = -\frac{9a}{16}.$$

2° Quant à la courbe (1), son rayon de courbure au point H, où la tangente est parallèle à Oy, est donné par

$$r = -\frac{f'_x}{f''_{y^2}}, \qquad \text{avec } x = a, \qquad y = h.$$

Le calcul donne immédiatement

$$r = -\frac{a^2 + h^2}{a}.$$

Et, comme $a^2 + h^2$ est le carré de OH, cette formule montre que l'angle COH est droit. Il en résulte que le lieu du point C a pour équation

$$x = -\frac{y^2}{a},$$

parabole de sommet O *et d'axe* Ox *ayant pour paramètre* $\frac{a}{2}$.

Autre solution de M. Long.