

RENÉ GARNIER

**Sur une propriété caractéristique des  
fonctions de Jacobi**

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 38-45

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_38\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__38_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES FONCTIONS  
DE JACOBI <sup>(1)</sup>;**

PAR RENÉ GARNIER.

Dans cette Note, nous allons établir la proposition suivante :

*Les fonctions monogènes analytiques*

$$f(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$$

de la variable complexe  $z = x + iy$  qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{X(x)}{Y(y)}$$

se ramènent soit aux fonctions de Jacobi  $\operatorname{sn} z$ ,  $\operatorname{cn} z$ ,  $\operatorname{dn} z$ , soit à des combinaisons simples, soit à des dégénérescences de ces fonctions.

Tout d'abord, nous présenterons une remarque qui allège notablement la discussion : Si  $f(z)$  répond à la question, les fonctions qui s'en déduisent par l'une des opérations

- (S<sub>1</sub>)             $z \mid z + a$             ( $a$ , constante quelconque),
- (S<sub>2</sub>)             $z \mid az$             ( $a$ , constante réelle),
- (S<sub>3</sub>)             $z \mid iz$ ,
- (S<sub>4</sub>)             $f(z) \mid a f(z)$ ,
- (S<sub>5</sub>)             $f(z) \mid i f(z)$ ,
- (S<sub>6</sub>)             $f(z) \mid \{ f(z) \}^{-1}$ ,
- (S<sub>7</sub>)             $f(z) \mid i \{ f(iz_0) \}_0$     ( $u_0$ , quantité conjuguée de  $u$ )

répondront aussi à la question.

---

(<sup>1</sup>) Cet article s'adresse spécialement aux lecteurs qui veulent se familiariser avec les calculs sur les fonctions de Jacobi : réduction des intégrales elliptiques à la forme normale de Legendre, intégration des fonctions de Jacobi, multiplication par 2, transformation d'ordre 2. Pour plus de détails sur les calculs, on pourra se servir des *Principes de la Théorie des fonctions elliptiques*, ... , par P. Appell et E. Lacour, 2<sup>e</sup> édition (Paris, Gauthier-Villars, 1922), Chap. IV, VII, X, XIII.

Cela étant, on déduit de (1) :  $P = \lambda X$ ,  $Q = \lambda Y$ ,  $\lambda$  étant une fonction de  $x$  et  $y$  à déterminer. Posons  $\lambda = e^\mu$  et écrivons que  $P$  et  $Q$  satisfont aux conditions de monogénéité de Cauchy ; il viendra

$$(2) \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = -X \frac{X' - Y'}{X^2 + Y^2}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = Y \frac{X' - Y'}{X^2 + Y^2},$$

et la condition d'intégrabilité pour  $\mu$  donne alors :

$$(3) \quad 2X^2 - XX'' - (2Y^2 - YY'') + X^2 \frac{Y''}{Y} - Y^2 \frac{X''}{X} = 0.$$

Or, cette équation est du type

$$(4) \quad X_1(x) + Y_1(y) + X_2(x) Y_2(y) + X_3(x) Y_3(y) = 0;$$

par différentiations on tire de (4)

$$(5) \quad X_2' Y_2 + X_3' Y_3 = 0.$$

On peut satisfaire à (5) en posant  $X_2' = 0 = X_3'$  ou  $Y_2' = 0 = Y_3'$  ; on vérifiera d'ailleurs que l'hypothèse  $X_2' = 0 = Y_3'$  n'introduit aucune solution nouvelle ; ces cas écartés, on doit prendre  $X_3' = aX_2'$ ,  $Y_2' = -aY_3'$ ,  $a$  étant une constante, et l'on en déduit que, quelles que soient les fonctions  $X_2(x)$ ,  $Y_3(y)$ , l'équation (4) est vérifiée par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} X_1 = -cX_2 - d, & X_3 = aX_2 + b, \\ Y_1 = -bY_3 + d, & Y_2 = -aY_3 + c \end{cases}$$

( $a, b, c, d$ , constantes).

Appliquons ce résultat à (3). Les deux premières solutions fournissent immédiatement la fonction

$$f(z) = e^z,$$

et celles qui s'en déduisent par les opérations  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$ . Cette solution écartée, on déduit de (6), en prenant  $X_2 \equiv X^2$  (ce qui n'introduit aucune restriction)

$$\begin{aligned} -XX'' + 2X'^2 &= -cX^2 - d, & X'' &= aX^3 + bX, \\ YY'' - 2Y'^2 &= bY^2 + d, & Y'' &= aY^3 + cY \end{aligned}$$

( $a, b, c, d$ , constantes réelles).

Ces équations ne sont compatibles que pour  $b + c = 0$  et elles

peuvent être remplacées alors par les suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} 2X'^2 = aX^4 + 2bX^2 - d, \\ 2Y'^2 = aY^4 - 2bY^2 - d; \end{cases}$$

dès maintenant, on prévoit donc que les fonctions  $f(z)$  devront être des fonctions elliptiques ou des dégénérescences de ces fonctions.

Ceci posé, des transformations  $(S_2)$  et  $(S_4)$  permettent de ramener les équations (7) à l'un des types canoniques suivants :

$$(8) \quad \begin{cases} X'^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2), & X'^2 = \varepsilon(1 + X^2)(1 - l^2 X^2), \\ Y'^2 = (1 + Y^2)(1 + k^2 Y^2), & Y'^2 = \varepsilon(1 - Y^2)(1 + l^2 Y^2) \\ & (\varepsilon = \pm 1; k^2 < 1). \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} X'^2 = (1 + X^2)(1 + k^2 X^2), & X'^2 = \varepsilon(1 - X^2)(1 + l^2 X^2), \\ Y'^2 = (1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2), & Y'^2 = \varepsilon(1 + Y^2)(1 - l^2 Y^2) \\ & (\varepsilon = \pm 1); \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} X'^2 = (1 + X^2)^2 - 4h^2 X^2, & X'^2 = (1 - X^2)^2 + 4h^2 X^2, \\ Y'^2 = (1 - Y^2)^2 + 4h^2 Y^2, & Y'^2 = (1 + Y^2)^2 - 4h^2 Y^2 \\ & (0 < h < 1); \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} X'^2 = 1 + X^2, & X'^2 = 1 - X^2, \\ Y'^2 = 1 - Y^2, & Y'^2 = 1 + Y^2; \end{cases}$$

$$(12) \quad X' = 1, \quad Y' = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1);$$

$$(13) \quad X' = 0, \quad Y' = 0.$$

Les types (8), (9), (10) correspondent au cas où dans (7) on a  $a \neq 0$ ; les types (11) supposent  $a = 0 \neq b$ , et (12), (13) :  $a = 0 = b$ .

On vérifiera sans peine que les formes (11) conduisent à

$$f(z) = \operatorname{tang} z$$

et à ses transformées par les opérations  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$ ,  $(S_4)$ ,  $(S_5)$  et leurs produits; quant aux systèmes (12) ou (13), ils donnent

$$f(z) = z,$$

et ses transformées par  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$ ,  $(S_6)$ , ou  $f(z) = \operatorname{const.}$

Examinons maintenant les types restants. La transformation  $(S_7)$  fait passer des formes (9) aux formes (8) et échange entre eux les deux systèmes (10); enfin les transformations  $(S_2)$  et  $(S_3)$  per-

mettent de supposer  $\varepsilon = 1$ . Nous n'avons donc que trois types de réduction à discuter :

$$(1) \quad X^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2), \quad Y^2 = (1 + Y^2)(1 + k^2 Y^2).$$

Désignons par  $\operatorname{sn} x$  la fonction de Jacobi, de module  $k^2$ , de périodes primitives  $4K, 2iK'$  ( $K$  et  $K'$  réels); nous aurons

$$X = \operatorname{sn} x, \quad Y = \pm \frac{1}{i} \operatorname{sn} iy;$$

ou pourra d'ailleurs se borner au signe  $+$ , moyennant les transformations  $z \mid z + 2K, f(z) \mid -f(z)$ . Cela étant, posons  $t = iy$ ; il viendra, d'après (2):

$$\begin{aligned} \mu &= - \int \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t} (\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t) \\ &= \operatorname{Log} \frac{\Theta(x) \Theta_1(x) \Theta(t) \Theta_1(t)}{H_1(x+t) H_1(x-t)} + \text{const. réelle,} \end{aligned}$$

les fonctions  $H, H_1, \Theta, \Theta_1$  étant construites non pas avec des périodes de zéros  $2K$  et  $2iK'$ , mais avec des périodes primitives de zéros  $4K$  et  $2iK'$ . Moyennant cette notation, on a

$$\operatorname{sn}(x \mid K, iK') = \frac{H(x) H_1(x)}{\Theta(x) \Theta_1(x)} \times \text{const. réelle,}$$

et, par suite, on peut prendre

$$f(z) = \frac{H(x) H_1(x) \Theta(iy) \Theta_1(iy) + \Theta(x) \Theta_1(x) H(iy) H_1(iy)}{H_1(x + iy) H_1(x - iy)},$$

soit encore

$$f(z) = \frac{H(x + iy)}{H_1(x + iy)},$$

ce qui donne la solution

$$f(z) = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}$$

et ses diverses transformées; actuellement, le module  $\overline{k^2}$  des nouvelles fonctions  $\operatorname{sn} z$  et  $\operatorname{cn} z$  est encore réel et inférieur à 1. A titre de vérification, on trouve :

$$\frac{\operatorname{sn}(x+t)}{\operatorname{cn}(x+t)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} t + \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} x}{1 - \operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t + \overline{k^2} \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 t};$$

on peut donc prendre  $X \equiv \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \operatorname{sn} \left( x \mid \frac{\bar{K}}{2}, i\bar{K}' \right)$ ,  $2\bar{K}$  et  $2i\bar{K}'$  étant les périodes de zéros des nouvelles fonctions  $\operatorname{sn} z$ ,  $\operatorname{cn} z$  :

$$(II) \quad X'^2 = (1 + X^2)(1 - l^2 X^2), \quad Y'^2 = (1 - Y^2)(1 + l^2 Y^2).$$

On posera  $l^2 X^2 = 1 - \xi^2$ , ce qui donnera, par une transformation  $(S_2)$ ,  $X = \operatorname{cn} x$  (le module étant  $\frac{1}{1+l^2}$ ) et l'on aura de même, moyennant  $(S_1)$  :

$$Y = \frac{1}{l} \operatorname{cn}(iy + b);$$

la constante réelle  $b$  doit d'ailleurs être choisie de manière que  $Y(y)$  soit réelle; on prendra donc  $b = K$ , et en posant  $t = iy + K$  on aura <sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} \mu &= \int \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{\operatorname{cn}^2 x - \operatorname{cn}^2 t} (\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t) \\ &= \operatorname{Log} \frac{\Theta(x+K)\Theta_1(x+K)\Theta(t+K)\Theta_1(t+K)}{H(x+t)H_1(x-t)} + \frac{\pi i}{4} + \text{const. réelle,} \end{aligned}$$

les fonctions  $H$ ,  $H_1$ ,  $\Theta$ ,  $\Theta_1$  étant construites avec les périodes primitives de zéros  $4K$ ,  $2K + 2iK'$ ; on aura ainsi <sup>(2)</sup> :

$$\operatorname{cn}(x \mid K, iK') = e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{H(x+K)H_1(x+K)}{\Theta(x+K)\Theta_1(x+K)} \times \text{const. réelle,}$$

et, comme tout à l'heure, on trouvera la fonction

$$f(z) = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z},$$

et ses transformées. Mais actuellement, les périodes primitives des zéros de  $\operatorname{sn} z$  et  $\operatorname{cn} z$  sont  $4K$  et  $2K + 2iK'$ ; le module  $k^2$

(1) On observera que  $\mu$  doit être réel pour  $x = 0 = y$ ; or soit

$$H(K)H_1(K) = \lambda g^{\frac{1}{2}};$$

actuellement  $g^2$  est un nombre négatif compris entre 0 et  $-1$ ; on en déduit que  $\lambda$  est positif comme, d'ailleurs,  $\Theta(K)$ ,  $\Theta_1(K)$  et  $\Theta(2K)\Theta_1(2K)$ ; l'argument du produit sous le signe  $\operatorname{Log}$  est donc  $-\frac{\pi}{4}$ .

(2) Voir la note précédente.

des deux fonctions précédentes est donc de la forme  $(1) 1 + e^{i\theta}$  ( $\theta$ , angle réel).

On peut obtenir un résultat plus expressif en revenant aux modules réels (que nous avons abandonnés pour la commodité de l'intégration).

En effet, la fonction précédente  $f(z)$ , construite avec les périodes de zéros sus-indiquées, est encore égale à

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z},$$

les fonctions  $H, H_1, \Theta, \Theta_1$  correspondant aux nouvelles fonctions  $\operatorname{sn} z$  et  $\operatorname{dn} z$  admettant  $4K$  et  $4iK'$  comme périodes primitives de zéros, c'est-à-dire encore à

$$f(z) \equiv \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z},$$

les périodes primitives étant  $4K$  et  $4iK'$  pour les nouvelles fonctions : le module  $k^2$  est devenu réel.

On vérifie d'ailleurs que l'on a actuellement :

$$f(a+b) = \frac{\operatorname{scd}(1-2k^2s_1^2+k^2s_1^4) + s_1c_1d_1(1-2k^2s^2+k^2s^4)}{(1-k^2s^2s_1^2)(1-s^2-s_1^2+k^2s^2s_1^2)}$$

avec

$$s \equiv \operatorname{sn} a, \quad c \equiv \operatorname{cn} a, \quad d \equiv \operatorname{dn} a; \quad s_1 \equiv \operatorname{sn} b, \quad c_1 \equiv \operatorname{cn} b, \quad d_1 \equiv \operatorname{dn} b.$$

On peut donc prendre

$$X(x) = \frac{2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1-2k^2 \operatorname{sn}^2 x + k^2 \operatorname{sn}^4 x} = \frac{\operatorname{sn} 2x}{\operatorname{dn} 2x} = \frac{1}{K} \operatorname{cn}(2x - 2K),$$

ce qui est bien conforme au début du calcul.

$$(III) \quad X'^2 = (1+X^2)^2 - 4h^2 X^2, \quad Y'^2 = (1-Y^2)^2 + 4h^2 Y^2.$$

On pose  $X = \frac{1-\xi}{1+\xi}$ , ce qui donne

$$\xi'^2 = [1-h+(1+h)\xi^2][1+h+(1-h)\xi^2];$$

---

(1) Cf. APPELL et LACOUR, *op. cit.*, p. 446, exercice 12.

ainsi, C étant choisi de manière que X soit réel, on trouvera :

$$X = \frac{\operatorname{sn} \frac{iK'}{2} - \operatorname{sn} i(x + C)}{\operatorname{sn} \frac{iK'}{2} + \operatorname{sn} i(x + C)},$$

en se rappelant que  $\operatorname{sn} \frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}$ , et en adoptant le module

$$k^2 = \left( \frac{1-h}{1+h} \right)^2 < 1.$$

On pourra écrire encore :

$$X = \frac{\operatorname{dn} \left( i \frac{x + C}{2} - i \frac{K'}{4} \right)}{\operatorname{dn} \left( i \frac{x + C}{2} + i \frac{K'}{4} \right)},$$

la fonction  $\operatorname{dn} u$  admettant les périodes primitives de zéros  $2K$  et  $iK'$ . Moyennant des transformations  $(S_1)$  et  $(S_3)$  on pourra prendre  $C = K'$  et, avec un nouveau module compris entre 0 et 1 :

$$X = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x},$$

d'où, en vertu de  $(S_3)$  et  $(S_5)$  :  $Y = \pm i \frac{\operatorname{cn} iy}{\operatorname{sn} iy \operatorname{dn} iy}$ ; on peut d'ailleurs se borner au signe supérieur moyennant  $(S_6)$ . On trouve ainsi, en posant  $iy = t$  :

$$\frac{X' - Y'}{X^2 - Y^2} = \frac{\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{sn}^2 t - 2k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 t}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t},$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{i \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{k (\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t)},$$

et par suite

$$f(z) = \operatorname{cn} z + iK'$$

et ses transformées.

*Résultat définitif.* — Les fonctions  $f(z)$  répondant au problème sont donc les fonctions  $\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}$ ,  $\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}$ ,  $\operatorname{cn} z$  (construites avec un module  $k^2$  réel), leurs dégénérescences (obtenues pour  $k^2 = 0$  ou  $1$ ), ainsi que  $e^z$ ,  $z$ ,  $1$  et que toutes les fonctions qui s'en déduisent par les opérations  $(S_1)$ ,  $\dots$ ,  $(S_7)$ .



On vérifiera que parmi ces fonctions se trouvent les suivantes :

$$\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z,$$

$$\operatorname{ns} z \left( = \frac{1}{\operatorname{sn} z} \right), \quad \operatorname{nc} z \left( = \frac{1}{\operatorname{cn} z} \right), \quad \operatorname{nd} z \left( = \frac{1}{\operatorname{dn} z} \right),$$

$$\operatorname{cd} z \left( = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z} \right), \quad \operatorname{ds} z \left( = \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z} \right), \quad \operatorname{sc} z \left( = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z} \right),$$

$$\operatorname{dc} z \left( = \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z} \right), \quad \operatorname{sd} z \left( = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z} \right), \quad \operatorname{cs} z \left( = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z} \right)^{(1)},$$

$$\frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}, \quad \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}, \quad \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}, \quad \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z \operatorname{sn} z}, \quad \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z},$$

$$\operatorname{sin} z, \operatorname{cos} z, \operatorname{tang} z, \operatorname{coséc} z, \operatorname{séc} z, \operatorname{cotg} z,$$

$$\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{coséch} z, \operatorname{séch} z, \operatorname{coth} z,$$

$$e^z, z, \frac{1}{z} \text{ et } 1.$$