

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 381-384

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__381_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide pesant S est formé d'un disque circulaire homogène, de rayon R, d'épaisseur négligeable, muni en son centre A d'une tige rectiligne OA, de longueur R, de masse négligeable, qui lui est invariablement fixée normalement à son plan.*

L'extrémité O de cette tige est articulée sans frottement au sommet d'un trièdre trirectangle fixe $Ox_1y_1z_1$ (Oz_1 verticale ascendante).

Le corps S se meut entre les deux plans matériels fixes

$$(P) \quad z_1 = R; \quad (Q) \quad z_1 = -R,$$

qu'il touche, soit en I, soit en J. On supposera le diamètre du disque légèrement inférieur à la distance des deux plans, de telle sorte que le contact ne puisse avoir lieu simultanément en I et en J.

On désignera par f le coefficient de frottement en ces deux points, par ω la vitesse angulaire de la rotation propre du disque, par λ la vitesse angulaire du plan AOz_1 .

1° Comment faut-il lancer le corps S pour qu'il se meuve sans appuyer sur les plans P et Q?

2° Le corps S étant supposé immobile, quelle percussion faut-il exercer au point J tangentiellement à la circonférence du disque pour que le mouvement ultérieur remplisse les conditions du premier paragraphe?

3° Comment faut-il lancer le corps S pour qu'il roule sans glisser : a. sur le plan inférieur; b. sur le plan supérieur? Étudier ces mouvements.

4° Étude générale du mouvement du corps entre les deux plans P et Q avec des vitesses initiales (ω_0, λ_0) quelconques. Discussion.

Examiner en particulier les deux cas

$$\lambda_0 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}; \quad \lambda_0 = \frac{\omega_0}{2} = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

On se bornera à indiquer l'aspect du mouvement, sans insister sur le calcul, d'ailleurs très simple, des expressions de λ et de ω en fonction de t .

Il sera commode de baser l'étude sur l'équation différentielle que vérifie la vitesse de glissement au point (I ou J) où le contact a lieu.

Indications sur la solution. — 1° Mouvement stationnaire d'une toupie de révolution. La condition est

$$R \omega_0 \lambda_0 = 2g.$$

2° Le moment de la percussion P par rapport à O doit avoir pour valeur le moment cinétique à la fin du choc, d'où, la masse de la toupie étant l'unité,

$$P = \pm \frac{\sqrt{5gR}}{2}.$$

3° a. La condition est simplement

$$\omega_0 + \lambda_0 = 0;$$

b. La condition est

$$\omega_0 = \lambda_0 \quad \text{avec} \quad R \omega_0 \lambda_0 > 2g.$$

4° Le théorème du moment cinétique au point O donne les équations du mouvement sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon f N; \quad \frac{5R}{4} \frac{d\lambda}{dt} = \varepsilon f N; \quad \frac{R}{2} \omega \lambda = g - N; \\ \text{avec} \quad N > 0; \quad \varepsilon(\lambda + \omega) < 0; \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

dans le cas du contact en J.

La vitesse de glissement u vérifie l'équation

$$R \frac{du}{dt} = \varepsilon f \left[2gR - \frac{(2u+k)(5u-k)}{49} \right]$$

avec $R(5\lambda - 2\omega) = k$.

On en déduit que, si

$$R \omega_0 \lambda_0 < 2g,$$

$|u|$ décroît et atteint la valeur zéro au bout d'un temps fini; il la conserve indéfiniment.

Si le contact a lieu en I, l'équation en u est

$$35R \frac{du}{dt} = \varepsilon f [(K - 5u)(K + 2u) - 98gR],$$

avec

$$R(5\lambda + 2\omega) = K, \quad \varepsilon(\lambda - \omega) < 0, \quad \varepsilon = \pm 1;$$

Si $K^2 < 80gR$, le contact a lieu en J;

Si $80gR < K^2 < 98gR$, le mouvement tend au bout d'un temps fini vers le mouvement étudié dans 1°;

Si $98 g R < K^2$, il y a roulement sans glissement en I au bout d'un temps fini.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une sphère homogène pesante, de rayon $R = 10^{\text{cm}}$, est assujettie à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe, en un lieu dont la latitude est 45 degrés.

Étudier son mouvement en tenant compte de la rotation de la Terre.

On prendra comme axes de référence liés à la Terre, l'horizontale Nord-Sud, l'horizontale Est-Ouest et la verticale issues de la position initiale du centre de la sphère.

u, v, o, p, q, r désigneront respectivement les composantes de la vitesse du centre de la sphère, et les composantes de sa rotation instantanée par rapport à la Terre.

On se bornera à étudier le cas où le mouvement initial de la sphère est une rotation de 10 tours par seconde autour de la verticale de son centre ($u_0 = v_0 = p_0 = q_0 = 0$).

1° Déterminer, dans le cas de cette sphère, la correction à apporter aux lois habituelles de la Mécanique terrestre pour tenir compte de la rotation de la Terre.

2° Déterminer avec précision la trajectoire du centre de la sphère. Indiquer sa nature et ses principales dimensions.

Nota : La pesanteur, ou résultante de l'attraction newtonienne et de la force d'inertie d'entraînement sera supposée constante et normale au plan horizontal donné dans la région où l'on étudie le mouvement de la sphère.

Indications sur la solution. — Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X + \varepsilon \sqrt{2} v, & \frac{2R}{5} \frac{dp}{dt} &= Y + qR \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{5} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \varepsilon \sqrt{2} u, & \frac{2R}{5} \frac{dq}{dt} &= -X + R \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{5} (r - p) & u - qR &= 0, \\ & & & & v + pR &= 0. \\ 0 &= Z - g - \varepsilon \sqrt{2} v; & \frac{2R}{5} \frac{dr}{dt} &= -R \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{5} q \end{aligned}$$

(ε = vitesse de rotation de la Terre; X, Y, Z désigne la réaction du plan; la masse de la sphère est prise pour unité).

L'élimination de X, Y, p, q, r donne deux équations en u et v , d'où les coordonnées x, y du centre de la sphère :

$$x = A(1 - \cos \rho t); \quad y = \frac{6\varepsilon \sqrt{2}}{7\rho} A(\sin \rho t - \rho t),$$

avec

$$7\rho = \varepsilon \sqrt{79}; \quad 79\varepsilon A = 7Rr_0\sqrt{2}.$$

La trajectoire est la projection orthogonale d'une cycloïde.

(Lille, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. C.79. — *Un disque circulaire homogène, de masse m , de rayon r , est soumis aux liaisons suivantes (sans frottements) : le centre O du disque est fixe et, de plus, un diamètre bien déterminé du disque, soit Δ ce diamètre, est assujéti à faire un angle constant et donné α avec la verticale Oz .*

La position du disque dépend donc de deux paramètres. On prendra les suivants : φ , angle du plan que définissent Oz et Δ avec un plan vertical fixe passant par Oz .

θ , angle du plan du disque avec le plan de Oz et Δ .

1° Discuter le mouvement pour des conditions initiales quelconques.

On discutera d'abord par rapport au paramètre θ , puis on examinera si φ varie toujours dans le même sens.

Caractériser tous les mouvements dans lesquels $\frac{d\theta}{dt}$ reste constant.

2° On suppose qu'à un instant t on ait

$$\theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (\text{donné});$$

à cet instant on fixe brusquement le plan (Δ, Oz) , le disque restant mobile autour de l'axe Δ . Calculer la valeur que prend la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$.

3° On impose au plan (Δ, Oz) un mouvement de rotation uniforme autour de Oz : $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (où ω est donné et constant), le disque restant librement mobile autour de Δ . Étudier le mouvement relatif du disque par rapport au plan (Δ, Oz) .

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une circonférence matérielle et pesante, de masse $4m$, de rayon a , peut tourner librement autour d'un axe Oz , fixe et horizontal, qui est invariablement lié à cette circonférence et qui lui est tangent au point O . Un point matériel P , de masse m , glisse sur cette circonférence. On néglige les frottements.*

I étant le centre de la circonférence, on désignera par φ l'angle du rayon IP avec le prolongement de OI et l'on appellera θ l'angle de OI avec la verticale descendante :

1° Écrire et intégrer les équations des petits mouvements du système autour de sa position d'équilibre stable.

2° On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ on ait

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Calculer, à cet instant, les valeurs des dérivées secondes $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ et déterminer, au même instant, la réaction du point P sur la circonférence.

(Marseille, juin 1926.)