

Agrégation des sciences mathématiques (session de 1926)

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 366-371

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__366_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(SESSION DE 1926).

Composition de Mathématiques élémentaires (Arithmétique).

Nous conviendrons d'appeler cycle d'ordre n l'ensemble des nombres obtenus en permutant circulairement, de toutes les façons possibles, les chiffres d'un nombre N .

On caractérise un cycle par la donnée de son ordre et celle du plus petit de ses nombres. Par exemple, le cycle d'ordre 3 du nombre 58 est formé des nombres 058, 580, 805.

1° Montrer qu'un diviseur commun à $10^n - 1$ et à l'un des nombres d'un cycle d'ordre n divise les autres nombres du cycle.

Énoncer une réciproque de cette proposition.

2° Déterminer tous les cycles d'ordre 3 dont les nombres sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique;

3° On considère tous les cycles d'ordre 6 dont les nombres sont, à l'ordre près, six termes consécutifs d'une progression arithmétique.

Établir que les six chiffres composant ces nombres sont distincts, que la raison R de la progression est un diviseur de $10^6 - 1$ et que le plus petit nombre du cycle est un multiple du quotient de R par 9.

On recherchera enfin les limites entre lesquelles R doit être compris et l'on en déduira la détermination des cycles considérés.

SOLUTION PAR M. B. GAMBIER.

1° Soit $N_1 = a_1 a_2 \dots a_n$ un nombre du cycle, écrit sous forme décimale : chaque a_i est un entier compris entre 0 et 9 inclus. On écrira de même

$$(1) \quad N_2 = a_2 a_3 \dots a_n a_1, \quad N_3 = a_3 a_4 \dots a_n a_1 a_2, \quad \dots, \quad N_n = a_n a_1 \dots a_{n-1}.$$

On voit que R est divisible par 9; on écrira $R = 9\rho$ puis

$$(5) \quad N_1 - \rho = 111a_1, \quad N_1 + 8\rho = 111a_2, \quad N_1 + 20\rho = 111a_3;$$

$$(6) \quad 9\rho = 111(a_2 - a_1), \quad 21\rho = 111(a_3 - a_1).$$

Les égalités (6) divisées par 3 donnent

$$(7) \quad \rho = 37\rho', \quad a_2 = a_1 + 3\rho', \quad a_3 = a_1 + 7\rho'.$$

Comme $a_3 \leq 9$, on a $\rho' = 1$ et $a_1 = 0, 1$ ou 2 .

On obtient ainsi trois cycles ($R = 333$)

037	148	259
370	481	592
703	814	925

Si l'on supposait, comme au n° 3, que les nombres du cycle donnent une progression, à l'ordre près, il y aurait lieu d'envisager l'hypothèse

$$N_2 = N_1 + 2R, \quad N_3 = N_1 + R$$

qui conduit par le même procédé aux trois cycles ($R = 333$)

074	185	296
740	851	962
407	518	629

3° On a, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les nombres 1, 2, 3, 4, 5 pris dans un ordre inconnu

$$(8) \quad N_{i+1} = N_1 + \lambda_i R \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

On écrit, par la même méthode que plus haut,

$$(9) \quad \begin{cases} 9N_1 - \lambda_1 R = 999999a_1, \\ 9N_1 + (10\lambda_1 - \lambda_2)R = 999999a_2, \\ 9N_1 + (10\lambda_2 - \lambda_3)R = 999999a_3, \\ 9N_1 + (10\lambda_3 - \lambda_4)R = 999999a_4, \\ 9N_1 + (10\lambda_4 - \lambda_5)R = 999999a_5, \\ 9N_1 + 10\lambda_5 R = 999999a_6. \end{cases}$$

L'égalité de $a_\alpha = a_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) entraînerait

$$10\lambda_{\alpha-1} - \lambda_\alpha = 10\lambda_{\beta-1} - \lambda_\beta$$

(en posant $\lambda_0 = \lambda_6 = 0$), ce qui revient à l'égalité

$$(10) \quad \lambda_{\alpha-1} \lambda_{\beta} = \lambda_{\beta-1} \lambda_{\alpha},$$

où les deux membres doivent être lus comme nombres du système décimal; or $\lambda_{\alpha-1} \neq \lambda_{\beta-1}$ et $\lambda_{\beta} \neq \lambda_{\alpha}$ de sorte que l'égalité est impossible, *les nombres a_1, a_2, \dots, a_6 sont donc distincts.*

D'autre part les nombres $\lambda_1, 10\lambda_1 - \lambda_2, 10\lambda_2 - \lambda_3, 10\lambda_3 - \lambda_4, 10\lambda_4 - \lambda_5, \lambda_5$ ne peuvent être tous divisibles par 3, sinon $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ le seraient tous, ce qui est absurde puisqu'à l'ordre près ce sont 1, 2, 3, 4, 5. Donc *l'une des égalités (9) donne $R = 9\rho$ où ρ est un entier* (les deux conclusions qui précèdent valent quelle que soit la valeur de n comprise entre 2 et 10 inclus). On remplace donc les égalités (9) par les égalités plus simples

$$(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6) :$$

$$(9') \quad N_1 + (10\lambda_{\alpha-1} - \lambda_{\alpha})\rho = 111111a_{\alpha}.$$

Par soustraction on a

$$(11) \quad [10(\lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1}) - (\lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha})]\rho = 111111(a_{\beta} - a_{\alpha}).$$

Or les nombres $a_1, \dots, a_{\alpha}, a_{\beta}, \dots, a_{\gamma}$ étant supposés rangés en ordre croissant, on a cinq intervalles qui ne peuvent être tous égaux ou supérieurs à 2, car $a_1 \geq 0, a_{\gamma} \leq 9$; donc l'un au moins des intervalles est égal à 1, et si, dans (11), on suppose $a_{\beta} - a_{\alpha} = 1$ on voit que ρ *divise 111111 et R divise 999999.*

(Le raisonnement est valable pour $n = 6, 7, 8, 9, 10$: R est multiple de 9 et divise $10^n - 1$.) Écrivons donc

$$(12) \quad 111111 = \rho\rho',$$

puis, quels que soient α et β , distincts, compris entre 1 et 6

$$(13) \quad \rho' = \frac{10(\lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1}) - (\lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha})}{a_{\beta} - a_{\alpha}}.$$

Cherchons le minimum de ρ' : utilisons encore une différence $a_{\beta} - a_{\alpha}$ égale à l'unité, on a

$$(14) \quad \lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1} \geq 1, \quad \lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha} \leq 5, \quad \rho' \geq 5.$$

Pour avoir le maximum de ρ' , remarquons que la plus grande différence $a_{\beta} - a_{\alpha}$ s'obtient en prenant $\alpha = 1$, et choisissant pour a_{β} le plus grand des a .

La différence $\alpha_\beta - \alpha_1$ est au moins égale à 5; N_β est le plus grand nombre, donc $\lambda_{\beta-1} = 5$

$$\rho' = \frac{10\lambda_{\beta-1} + \lambda_1 - \lambda_\beta}{\alpha_\beta - \alpha_1} \leq \frac{50 + 4 - 0}{5},$$

d'où

$$(15) \quad \rho' \leq 10.$$

La décomposition de 1111111 en facteurs premiers, à savoir 3. 7. 11. 13. 37 montre que ρ' est égal à 7, ρ à 15873, R à 142857. On a

$$(16) \quad N_1 = \lambda_1 \rho + \alpha_1 1111111;$$

donc N_1 est multiple de ρ ou $\frac{R}{9}$ (d'ailleurs N_2, \dots, N_6 aussi). Dans la formule (16), on ne peut donner à λ_1 que les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et à α_1 que les valeurs 0, 1, 2, 3, 4; cela réduit donc les essais à un total de 25. J'écris les nombres en question, entre lesquels on doit choisir N_1 :

	0.	1.	2.	3.	4.
1.	015873	126984	238095	349206	460317
2.	031746	142857	253968	365079	476190
3.	047619	158730	269841	380952	492063
4.	063492	174603	285714	396825	5.....
5.	079365	190476	3.....	4.....	5.....

Le chiffre marqué à gauche est la valeur de λ_1 ; le chiffre placé en haut est la valeur de α_1 et doit coïncider avec le premier chiffre du nombre, ce qui dispense d'écrire certains nombres; la première colonne exige seule un calcul, les autres s'obtenant par l'addition de 1111111.

Dans N_1 le chiffre de gauche doit être le plus petit: ce critérium oblige à ne garder que le tableau T :

$$(T) \quad \left\{ \begin{array}{l} 015873 \quad 126984 \\ 031746 \quad 142857 \quad 253968 \\ 047619 \\ 063492 \\ 079365 \end{array} \right.$$

D'autre part, si l'on essaie pour N_1 le nombre 031746 qui se ter-

mine par 6, puisque R se termine par 7, les chiffres terminaux de $N_1, N_1 + R, \dots, N_1 + 5R$ seront respectivement 6, 3, 0, 7, 4, 1 et doivent coïncider (à l'ordre près) avec les chiffres de N_1 , ce critérium réussit pour 031746, 142857, 253968 et échoue pour les autres comme le montre le tableau

296307	630741
307418	741852
418529	852963
529630	963074

borné aux seuls chiffres 2, 3, ..., 9 terminaux des divers nombres du tableau T.

Les trois nombres cités réussissent, on vérifie que pour eux

$$N_2 = N_1 + 2R, \quad N_3 = N_1 + R, \quad N_4 = N_1 + 5R,$$

$$N_5 = N_1 + 3R, \quad N_6 = N_1 + 4R$$

(vérification nécessaire uniquement pour 031746, nombre dont tous les chiffres sont au plus égaux à 7, de sorte que l'addition de 111111 ou 222222 à un nombre quelconque du cycle se fait sans retenue).