

Concours d'agrégation en 1926

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 346-348

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__346_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGREGATION EN 1926

Mathématiques élémentaires.

(DEUXIÈME QUESTION.)

On donne, dans un plan, trois points O , A , ω . Après une rotation d'angle α et de centre ω , les points O et A prennent respectivement les positions O_α et A_α .

La droite AA_α coupe la circonférence de centre O_α et qui passe en A_α aux points A_α et M_α .

- 1° Étudier comment varie, avec α , le vecteur $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$.
- 2° Déterminer l'amplitude et le centre de la rotation qui permet, en général, de faire coïncider les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$. Lieu du centre de cette rotation quand α varie.

3° Montrer que la perpendiculaire menée de O_α à AA_α passe par un point fixe I . Lieu de ce point I quand, O et A restant fixes, ω décrit une circonférence donnée, passant par A , ou une circonférence donnée dont le centre est le milieu de AO .

4° Les points O et A étant donnés, ainsi qu'une droite D , construire les points ω et I sachant qu'ils sont sur la droite D . Discuter.

SOLUTION PAR M. O.

1° De ce que $O_\alpha M_\alpha = O_\alpha A_\alpha = OA$, résulte que le vecteur $O_\alpha M_\alpha$ conserve la même grandeur.

Si l'on appelle $\hat{O}$, $\hat{A}$, $\hat{\omega}$ les angles du triangle $OA\omega$, on a $\widehat{O_\alpha A_\alpha \omega} = \hat{A}$. Mais, dans le triangle isocèle ωAA_α , $\widehat{AA_\alpha \omega} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Donc $\widehat{O_\alpha A_\alpha A} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \hat{A}$. Par suite, dans le triangle isocèle $O_\alpha A_\alpha M_\alpha$, $\widehat{A_\alpha O_\alpha M_\alpha} = \alpha + 2\hat{A}$ et, en désignant par P et N les points où $O_\alpha A_\alpha$ et $O_\alpha M_\alpha$ rencontrent la droite OA , $\widehat{PO_\alpha N} = \pi - \alpha - 2\hat{A}$; et, comme $\widehat{NPO_\alpha} = \alpha$, il vient

$$\widehat{ONM_\alpha} = \pi - 2\hat{A}.$$

Ainsi, l'angle du vecteur $O_\alpha M_\alpha$ avec la direction fixe OA est constant; donc, la direction de ce vecteur, de même que sa grandeur, est invariable.

2° On amène le vecteur OA à coïncider avec $O_\alpha M_\alpha$ par deux rotations, l'une d'amplitude α autour de ω qui amène OA en $O_\alpha A_\alpha$, l'autre d'amplitude $-(\alpha + 2\hat{A})$ autour de O_α . D'après la règle connue de la composition des rotations, ces deux rotations peuvent être remplacées par une seule d'amplitude égale à la somme algébrique de leurs amplitudes, c'est-à-dire à $-2\hat{A}$ autour d'un centre C . Ce centre C se trouve d'abord sur la bissectrice de l'angle $O\omega O_\alpha$. De plus, puisque l'angle OCO_α doit être égal à $2\hat{A}$, l'angle $O\omega C$ est égal à $\hat{A}$, et, par suite, le centre C doit se trouver sur le cercle circonscrit au triangle $OA\omega$, qui constitue le lieu de ce centre C lorsque α varie.

3° La droite $O_\alpha H$ perpendiculaire à $A_\alpha M_\alpha$ coupant ωC en J , on a

$$\begin{aligned}\widehat{IO_\alpha\omega} &= \pi - (\widehat{\omega O_\alpha A_\alpha} + \widehat{HO_\alpha A_\alpha}) = \pi - \left(\hat{O} + \frac{\alpha}{2} + \hat{A}\right) \\ &= \pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \pi - \hat{\omega}\right) = \hat{\omega} - \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\widehat{IJ\omega} = \widehat{IO_\alpha\omega} + \widehat{J\omega O_\alpha} = \hat{\omega} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \hat{\omega},$$

et

$$\widehat{\omega JO} = \pi - \hat{\omega}.$$

Donc, le lieu de J est un cercle passant par O et ω , et, puisque $\widehat{IJ\omega}$ est aussi constant, IJ coupe ce cercle en un point I fixe.

Mais, si $\alpha = 0$, O_α vient en O , A_α en A , et $O_\alpha H$ se confond avec la perpendiculaire menée par O à la tangente en A au cercle de centre ω , ou, ce qui revient au même, avec la parallèle à ωA menée par O . Donc, l'angle $IO\omega$ est égal à $\hat{\omega}$, et le triangle $O\omega I$ est isocèle.

Ainsi, le point I est le symétrique de O par rapport au pied K de la perpendiculaire abaissée de ω sur la parallèle à ωA menée par O .

Si, O et A étant fixes, le point ω décrit un cercle passant par A, la perpendiculaire ωK à $A\omega$ passe par le point B, diamétralement opposé à A dans ce cercle. Dès lors, le point K décrit le cercle décrit sur OB comme diamètre, et le lieu du point I est le cercle de centre B passant par O.

De plus, la perpendiculaire élevée à ωK en son milieu passant par le milieu de OA, ce dernier point est à égale distance de O et K. Si donc ω décrit un cercle autour de ce point, le point I décrit le même cercle, et le point I un cercle homothétique de celui précédent par rapport à O, avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$, ce cercle qui a son centre en A.

4° Abaissons de O sur $A\omega$ la perpendiculaire OL. On a

$$\omega L = KO = IK.$$

Le point L se trouve donc sur la droite D' menée parallèlement à la droite D sur laquelle se trouvent I et ω , c'est-à-dire sur la droite homothétique de D par rapport à O, avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$.

Si la droite D est donnée, il en est de même de D' sur laquelle doit se trouver L; mais, de plus, l'angle OLA étant droit, le point L est sur le cercle décrit sur OA comme diamètre. Le point L est donc donné par la rencontre de ce cercle et de la droite D'; la droite AL donne ensuite le point ω sur D, et la parallèle à AL menée par O, le point I.

Suivant que la droite D' et le cercle de diamètre OA ont en commun deux points réels ou imaginaires, il y a, ou non, deux solutions réelles qui se réduisent à une lorsque la droite D' est tangente à ce cercle.