

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1926

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 341-345

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__341_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1926.

Composition de Géométrie analytique.

PREMIÈRE QUESTION.

Deux points P et P' décrivent une ellipse (E), de foyer F, et qui, rapportée à ses axes, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La somme des distances $FP + FP'$ est constante :

$$FP + FP' = k.$$

1° Montrer que le milieu M du segment PP' décrit une droite d'équation $x = h$. Relation entre k et h.

2° Trouver l'enveloppe (G) de la droite PP'.

3° Trouver les tangentes communes à (E) et à (G), ainsi que les points d'intersection de ces deux courbes.

4° Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées à (E) aux points P et P' ⁽¹⁾.

(1) Prière de faire la figure.

SOLUTION PAR M. PH. DU PLESSIS.

1° Si F est le foyer d'abscisse c , on a, comme il est bien connu,

$$FP = a - \frac{cx}{a}, \quad FP' = a - \frac{cx'}{a},$$

d'où, en faisant la somme, et si h est l'abscisse du milieu M de PP',

$$k = 2a - \frac{2ch}{a}.$$

Le point M décrit donc la perpendiculaire à l'axe focal AA', menée par le point H d'abscisse

$$(1) \quad h = \frac{a(2a - k)}{2c}.$$

Lorsque les points P et P' viennent se confondre avec l'un des points C de rencontre de cette droite avec l'ellipse (E), on a

$$k = 2FC,$$

ce qui montre que la solution n'est réelle que si

$$2(a - c) \leq k \leq 2(a + c).$$

2° Transformons la figure par dilatation des ordonnées dans le rapport $\frac{a}{b}$.

A l'ellipse (E) correspond le cercle (E₁) de diamètre AA', aux points P et P' de (E) les points P₁ et P'₁ de (E₁), et le milieu M₁ de P₁P'₁ décrit aussi la droite HC. Comme OM₁ est perpendiculaire à P₁P'₁, l'enveloppe de cette droite est la parabole (G₁) de foyer O et de sommet H, dont l'équation est

$$(2) \quad y^2 + 4h(x - h) = 0.$$

L'enveloppe (G) de PP' est donc la parabole obtenue en réduisant les ordonnées de la première dans le rapport $\frac{b}{a}$; son équation est

$$(3) \quad a^2y^2 + 4b^2h(x - h) = 0.$$

Son sommet est H et son paramètre $\frac{2b^2h}{a^2}$.

3° Lorsque les points P_1 et P'_1 se confondent en C_1 , point de rencontre de HC et du cercle (G_1) , la droite $P_1 P'_1$ se confond avec la tangente en C_1 à ce cercle. Cette tangente, avec sa symétrique par rapport à AA' , constitue donc un premier couple de tangentes communes à (G_1) et à (E_1) . Pour avoir le second, il suffit de remarquer que les droites isotropes issues de O sont tangentes à la fois au cercle (E_1) de centre O et à la parabole (G_1) de foyer O . Ce sont d'ailleurs les asymptotes de ce cercle.

Donc les tangentes communes à la parabole (G) et à l'ellipse (E) sont : 1° les tangentes à cette ellipse en ses points de rencontre C et C' avec la droite HM ; 2° les asymptotes de l'ellipse, d'équations

$$ay = \pm bx\sqrt{-1}.$$

Quant aux points communs à (G) et à (E) , ils auront mêmes abscisses que les points communs à (G_1) d'équation (2) et au cercle (E_1) d'équation

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

L'élimination de y^2 entre ces équations donne immédiatement

$$(4) \quad x^2 - 4hy + 4h^2 - a^2 = 0$$

ou

$$(x - 2h)^2 = a^2,$$

c'est-à-dire

$$x = 2h \pm a.$$

D'ailleurs la substitution de a et de $-a$ dans le premier membre de (4) donnant $-4h(a-h)$ et $4h(a+h)$ qui sont de signes contraires, une seule de ces racines est comprise entre $-a$ et a et il n'y a que deux points communs réels.

4° Le pôle Q_1 de P, P'_1 par rapport au cercle (E_1) est situé sur OM_1 et tel que

$$OM_1 \cdot OQ_1 = a^2.$$

Le lieu de ce pôle est donc le cercle inverse de la droite HC_1 par rapport au cercle (E_1) , c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle $OC_1 T$, si T est le point de OA où se coupent les tangentes en C et en C_1 à (E) et à (E_1) . L'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{h}x = 0.$$

Le lieu du pôle Q de PP' par rapport à l'ellipse (E) est dès lors l'ellipse, semblable à (E), qui a pour axe OT et passe par C. Son équation est

$$x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} - \frac{a^2 x}{h} = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x}{h} = 0.$$

DEUXIÈME QUESTION.

Un triangle rectangle AOB a pour hypoténuse un rayon variable OB d'un cercle de centre O et pour sommet de l'angle droit un point A variable sur une droite fixe qui rencontre le cercle aux points D et D', H étant le milieu de DD', on désigne par α l'angle $\widehat{HOA}$ et par β l'angle $\widehat{HOB}$.

1° Relation entre α et β .

2° Déterminer le maximum de l'angle β , ainsi que la valeur de α pour laquelle il y a maximum.

3° Déterminer la position de DD' de telle manière que, lorsque β est maximum, A se trouve au milieu du segment HD. Calculer dans ce cas la valeur numérique de $\cos \beta$ (1).

SOLUTION PAR M. PH. DU PLESSIS.

1° Il suffit d'évaluer OA dans les triangles OAB et OAH pour avoir immédiatement, en posant $OB = r$, $OH = h$,

$$r \cos(\beta - \alpha) = \frac{h}{\cos \alpha}$$

ou

$$\cos \alpha \cos(\beta - \alpha) = \frac{h}{r},$$

qu'on peut écrire

$$\cos \beta + \cos(\beta - 2\alpha) = \frac{2h}{r}.$$

2° Le maximum de β aura lieu lorsque la dérivée partielle du

(1) Prière de faire la figure.

premier membre par rapport à α sera nulle, c'est-à-dire pour

$$\sin(\beta - 2\alpha) = 0$$

ou

$$\beta = 2\alpha.$$

Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir immédiatement par la géométrie. En effet, le point A se trouvant sur le cercle de diamètre OB, le maximum de β aura lieu quand ce cercle sera tangent à la droite DD'. Mais ce cercle passant par le pied I de la perpendiculaire abaissée de B sur OH, et le point de contact A étant alors le milieu de l'arc IB, on a

$$\beta = 2\alpha.$$

L'égalité des angles faits par OH et OB avec la perpendiculaire OA à AB entraîne la conséquence que AB coupe OH à une distance de O égale à OB. Donc, AB passe par l'extrémité C du rayon formé par OH prolongé. Le point A se trouvant, dès lors, sur le cercle de diamètre OC s'obtient par la rencontre de ce cercle et de la droite DD'; puis, le point B par la rencontre de la droite CA avec le cercle donné.

Dans ces conditions,

$$OI = OC - 2HC = r - 2(r - h) = 2h - r,$$

et la valeur correspondante de β est donnée par

$$\cos \beta = \frac{2h - r}{r}.$$

3° Si le point A se trouve au milieu de AD, BD est parallèle et égal à HC puisque A est la projection du milieu de OB sur HD; les points I et H sont symétriques par rapport à O, et l'on a

$$IO = OH = \frac{HC}{2}$$

ou $IO = \frac{OC}{3}$; par suite, $\cos \beta = -\frac{1}{3}$.