

PAUL APPELL

Sur la constante C d'Euler

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 289-290

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONSTANTE C D'EULER ;

PAR PAUL APPELL.

On peut poser, d'après la définition même de C,

$$C = H(h) - \log h + S(h),$$

où h est un entier ≥ 2 ,

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h-1},$$

$S(h)$ tendant vers zéro quand h croît indéfiniment. M. Ser a donné l'expression de $S(h)$ dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (2^e série, t. IV, novembre-décembre 1925, p. 126-128):

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + \frac{p_3}{h} \frac{1}{h+1} + \frac{p_4}{h} \frac{1.2}{(h+1)(h+2)} + \dots,$$

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p_{\nu+2} \frac{1.2 \dots \nu}{(h+1)(h+2) \dots (h+\nu)},$$

où

$$p_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x)(2-x) \dots (\nu-1-x)}{1.2 \dots \nu} dx.$$

On a aussi, en vertu de l'identité

$$\frac{1.2 \dots \nu}{(h+1) \dots (h+\nu)} = \frac{1.2 \dots h}{(\nu+1) \dots (\nu+h)},$$

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + (h-1)! \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{p_{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+h)};$$

on peut également calculer les quantités

$$\lambda_h = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{p_{\nu+1}}{\nu+h},$$

dont M. Ser donne les deux premières λ_0 et λ_1 (*loc. cit.*, p. 127) en retrouvant la formule de Fontana-Bessel :

$$C = \lambda_0 = S(1) = \frac{p_2}{1} + \frac{p_3}{2} + \frac{p_4}{3} + \dots$$

Nous ferons ici quelques remarques sur $S(h)$. On a aussi

$$C = H(k) - \log k + S(k),$$

où k est un entier différent de h ($k \geq 2$). Alors en retranchant, on a, quel que soit C ,

$$H(k) - H(h) - \log \frac{k}{h} + S(k) - S(h) = 0.$$

Donc, comme $H(k) - H(h)$ est commensurable, $\log \frac{k}{h}$ incommensurable, le logarithme étant népérien,

$$(1) \quad S(k) - S(h) = \text{incomm.} \quad (k \neq h).$$

Dans ces conditions il est impossible que $S(h)$ soit commensurable pour deux valeurs différentes de l'entier h , $h = h_1$, $h = h_2$, car

$$S(h_1) - S(h_2),$$

qui devrait être incommensurable, d'après (1), serait commensurable. Il peut exister une seule valeur de h , $h = h_1$, rendant $S(h)$ commensurable. Si cette valeur existe, C est incommensurable d'après l'équation de définition où $h = h_1$. Mais il est probable que h_1 n'existe pas et que $S(h)$ est incommensurable pour toutes les valeurs de l'entier h .

On conclut de là que, quel que soit C , commensurable ou incommensurable, $C + \log h$ est incommensurable pour toutes les valeurs de h , sauf une $h = h_1$, au plus. Si h_1 existe, C est incommensurable; s'il n'existe pas, on ne peut rien dire sur la nature arithmétique de C .