NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 284-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__284_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre* AB *homogène pesante, de longueur* $2l$, *de masse* M, *mobile dans un plan vertical fixe* Oxy, *a son milieu* C *rattaché, par un fil, de masse négligeable, de longueur* λ, *au point fixe* O ; *en outre elle passe constamment dans un très petit anneau* Q *situé sur la verticale* Oy : $\overline{OQ} = \lambda$; *cette liaison est supposée sans frottement.*

Prendre comme paramètre l'angle $\theta = \left(\widehat{Oy, BA}\right)$:

1° *Calculer la force vive de* AB ;

2° *Écrire l'équation du mouvement et donner une intégrale première;*

3° *Déterminer en grandeur, direction et sens les réactions* $\vec{T}$ *et* $\vec{R}$ *appliquées aux points* C *et* Q; *donner l'expression explicite de leur mesure* T *et* R *en fonction de* θ;

4° *En supposant que pour* $t = 0$, *on a* $\theta = 0$, $\theta' = \omega$, *discuter l'allure du mouvement selon la valeur de* ω. *Dans cette discussion, on supposera la liaison entre le fil et la barre réalisée de telle manière que la portion* BC *de la barre puisse, aussi bien que la portion* CA, *passer dans l'anneau* Q; *si à un instant quelconque la distance* $\overline{CQ}$ *devient supérieure à* l *on considérera le problème comme terminé; on* *tiendra compte dans la discussion de ce que la liaison entre* C *et* O *est réalisée par un fil : si à un instant quelconque le fil n'est plus tendu, on arrêtera la discussion;*

5° *Écrire et intégrer l'équation des petits mouvements de la barre autour de sa position d'équilibre stable.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'équation de la force vive est

$$\left(4\lambda^2 + \frac{l^2}{3}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\lambda\cos 2\theta + h.$$

C'est celle d'un mouvement pendulaire.

La tension T du fil s'obtient au moyen du théorème du centre de gravité, par projection sur AB

$$4M\lambda\theta'^2\cos\theta + 2M\lambda\theta''\sin\theta = (T - Mg)\cos\theta.$$

La réaction R au point Q s'obtient par le théorème du moment cinétique dans le mouvement du centre de gravité

$$M\frac{l^2}{3}\theta'' = 2\lambda\cos\theta\, R$$

$\left(\text{R compté positivement dans le sens } \theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

EPREUVE PRATIQUE. — *Un solide plein homogène, pesant, de masse* M *a la forme d'un « diabolo », c'est-à-dire qu'il est constitué par deux cônes de révolution identiques accolés par leur sommet* S.

Soient a le rayon de base et h la hauteur de l'un des cônes.

A l'instant $t = 0$, on pose ce diabolo sur un plan P *dont la ligne de plus grande pente* OX *fait un angle α avec l'horizontale, l'axe de révolution* CC' *étant horizontal. Soit f le coefficient du frottement de glissement aux deux points de contact* J *et* J'; *on suppose le frottement de roulement négligeable.*

A un instant t, on désigne par x l'abscisse commune de J *et* J', *par θ l'angle dont a tourné le diabolo, par* N *et* N' *les réactions normales en* J *et* J', *par* F *et* F' *les réactions tangentielles (comptées positivement vers le haut).*

Déterminer en fonction de t : x, θ, F, F', N, N' *dans les divers types de mouvement possibles suivant les valeurs de α.*

Application numérique :

$a = 5^{\text{cm}}$, $h = 6^{\text{cm}}$, $M = 700^{\text{g}}$, $f = 0,16$, $g = 981$ C. G. S.

Calculer (avec trois chiffres) x, θ, F, F', N, N' *à l'instant* $t = 1^{\text{s}}$:

1° *pour* $\alpha = 5°$; 2° *pour* $\alpha = 60°$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° *Roulement sans glissement.* L'équation du mouvement est

$$1,3\,a\theta'' = g\sin\alpha.$$

Les réactions sont données par

$$2\mathrm{N} = 2\mathrm{N}' = \mathrm{M}g\cos\alpha,$$
$$2\mathrm{F} = 2\mathrm{F}' = \mathrm{M}g\sin\alpha - \mathrm{M}a\theta''.$$

Ce cas se produit si

$$\operatorname{tang}\alpha < \frac{1,3}{0,3}f.$$

2° *Glissement.* — On a les relations

$$2\mathrm{N} = 2\mathrm{N}' = \mathrm{M}g\cos\alpha,$$
$$x'' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$
$$0,3\,a\theta'' = fg\cos\alpha.$$

(Lille, novembre 1925.)

C.65. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère un cube homogène, pesant, et l'on désigne par a la longueur de l'arête.*

1° *Étudier le mouvement du cube en chute libre, les conditions initiales étant arbitraires.*

2° *On fixe un sommet O du cube de façon que le cube puisse librement tourner autour de ce point. Étudier le nouveau mouvement sachant que, à l'instant initial, une arête issue de O est verticale ascendante, et le corps est animé d'une rotation autour de la diagonale OO' du cube, mesurée par ω.*

Déterminer la valeur de ω en fonction de a et de l'accélération g due à la pesanteur, de manière que la valeur maximum de l'angle aigu que fait la diagonale OO' avec la verticale ascendante soit 90°.

3° *A un instant où OO' est horizontal, on immobilise, brusquement, le sommet O' opposé au sommet O qui reste fixe. Étudier ce dernier mouvement.*

C.66. — ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un hémisphère plein, homogène de masse* M, *de rayon* R *et un point matériel de masse m, situé à l'intérieur sur l'axe de symétrie, à la distance a du centre* $(a < \mathrm{R})$.

1° *Calculer l'attraction newtonienne de l'hémisphère sur le point, en désignant par f l'attraction mutuelle de deux points matériels, de masses égales à l'unité, et dont la distance est égale à l'unité.*

2° *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près, le rapport* $\frac{a}{\mathrm{R}}$ *par la condition que cette attraction soit nulle.*

(Paris, juin 1923.)

C.67. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Sur un cylindre* C *horizontal roule un parallélépipède rectangle* P, *homogène et pesant. Le centre de gravité est, au repos, dans le plan vertical de l'axe du cylindre et les arêtes horizontales sont, les unes parallèles, les autres perpendiculaires aux génératrices du cylindre. Ce parallélépipède supporte par deux fils tendus et égaux, de longueur* l, *un second parallélépipède* Q *dont les arêtes sont parallèles à celles du premier. Le plan vertical de l'axe du cylindre est un plan de symétrie général du système.*

Les moments d'inertie respectifs de P *et* Q *autour d'axes parallèles à* C *menés par leur centre de gravité sont* Mp^2, $M'q^2$.

Étudier les petits mouvements de ce système dans le plan perpendiculaire à C *qui contient les centres de gravité* P *et* Q. *On adoptera comme paramètres :*

1° *L'angle* u *de roulement de* P *sur son support;*

2° *L'angle* θ *de la direction des fils avec la verticale.*

(Besançon, novembre 1925.)