

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 219-224

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__219_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. -- I. *On donne l'équation différentielle*

$$y'' + 4y' + 13y = \sin 3x + 6e^{-2x}(\sin 3x + \cos 3x) - 6,$$

et l'on demande :

- 1° Trouver l'intégrale générale ;
- 2° Trouver l'équation de la courbe intégrale particulière qui passe par l'origine des coordonnées et qui admet en ce point un point d'inflexion : soit $y = f(x)$ celle-ci ;
- 3° Trouver la partie principale de $f(x)$, en prenant x comme infiniment petit principal, et en déduire la forme de l'intégrale particulière pour des valeurs petites de x .

II. On considère la courbe qui a pour équations

$$x = R(t - \sin t),$$

$$y = R(1 - \cos t),$$

$$z = 4R \sin \frac{t}{2}$$

et l'on demande :

- 1° Calculer le rayon de courbure, en fonction de t .
- 2° En chaque point de cette courbe, on porte sur la normale principale, dans le sens de la concavité, une longueur égale à

$$R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Trouver les équations de la courbe décrite par le point ainsi obtenu ; forme de cette courbe.

SOLUTION. — Première question.

1° L'intégrale générale de l'équation est.

$$y = [A \sin 3x + B \cos 3x + x(\sin 3x - \cos 3x)] e^{-2x} \\ + \frac{1}{40} (\sin 3x - 3 \cos 3x) - \frac{6}{13}.$$

2° L'intégrale particulière devant passer par O et admettre en ce point une inflexion, on aura $y_0 = y''_0 = 0$ pour $x = 0$. L'équation différentielle donne alors

$$4y'_0 = 6 - 6 = 0, \quad \text{donc} \quad y'_0 = 0.$$

L'intégrale cherchée sera donc tangente en O à Ox.

On en déduit :

$$B - \frac{3}{40} - \frac{6}{13} = 0,$$

$$3A - 1 - 2B + \frac{3}{40} = 0.$$

Donc

$$B = \frac{3}{40} + \frac{6}{13} = \frac{279}{520}, \quad A = \frac{1}{3} + \frac{1}{40} + \frac{4}{13} = \frac{1039}{1560}.$$

3° On sait que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Pour calculer y''' , dérivons les deux membres de l'équation différentielle : on obtient

$$y'''_{(0)} = 3 - 12 + 18 = 9.$$

Donc

$$y = f(x) = \frac{9}{6} x^3 + \dots,$$

la partie principale est $\frac{3}{2} x^3$, d'où la forme.

Deuxième question.

$$1^\circ \quad x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad z = 4R \sin \frac{t}{2},$$

$$dx = R(1 - \cos t) dt, \quad dy = R \sin t dt, \quad dz = 2R \cos \frac{t}{2} dt,$$

d'où

$$ds = 2R dt.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1 - \cos t}{2}, \quad \beta = \frac{\sin t}{2}, \quad \gamma = \cos \frac{t}{2},$$

$$d\alpha = \frac{\sin t}{2} dt, \quad d\beta = \frac{\cos t}{2} dt, \quad d\gamma = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt,$$

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

d'où

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{4R}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

2° Les cosinus de la normale principale sont :

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}, \quad \beta' = \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}, \quad \gamma' = \frac{-\sin \frac{t}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

Les équations du lieu cherché sont donc :

$$X = x + \alpha' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = R t,$$

$$Y = y + \beta' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = R,$$

$$Z = z + \gamma' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = 3R \sin \frac{t}{2}.$$

C'est une courbe plane [plan $y = R$], dont la projection sur le plan XOZ a pour équation

$$Z = 3R \sin \frac{X}{2R} \quad (\text{sinusoïde}).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer la valeur numérique de l'intégrale définie

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 + 4}}$$

avec une erreur absolue inférieure à $\frac{1}{2000}$.

On donnera le résultat avec 3 décimales.

(Nota. — Cette intégrale se calcule par un développement en série.)

II. Une surface plane, représentée sur la figure, a la forme d'un rectangle dont on a supprimé les portions intérieures à deux cercles des centres K et K'.

[La figure montre les deux cercles symétriques par rapport à l'un des axes du rectangle OE, le cercle K coupe un côté du rectangle AD parallèle à OE en deux points B et C (marquer ABCD dans le sens OE), enfin la droite KK' coupe OE en un point H.]

On donne

$$OA = a, \quad AB = b, \quad BC = \sqrt{2}r, \quad CD = c, \quad KC = r,$$

$$KH = a + r \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1° Centre de gravité de cette surface plane;

2° Moment d'inertie par rapport à l'axe OE (densité = 1);

3° Volume engendré par cette surface en tournant autour de OE.

SOLUTION. — Première question.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5 + 4}} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left(1 + \frac{x^5}{4} \right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{x^5}{4} + \dots + \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{3} + p - 1 \right) \left(\frac{x^5}{4} \right)^p + \dots \right\}, \end{aligned}$$

en intégrant entre 0 et 1

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{1}{4 \times 6} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{3} + p - 1 \right) \frac{1}{4^p (5p + 1)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Désignons par a le nombre $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ et par b la série; $\mathcal{C}_x$ désigne l'erreur absolue commise sur x . On a

$$\mathcal{C}_1 = b\mathcal{C}_a + a\mathcal{C}_b,$$

il faut

$$b\mathcal{C}_a + a\mathcal{C}_b < \frac{1}{2000}.$$

Or on sait que $a < \frac{1}{2}$ et $b < 1$ visiblement.

On prendra

$$\mathcal{C}_a < \frac{1}{4000}, \quad \mathcal{C}_b < \frac{1}{1000};$$

ces calculs sont classiques et faciles. On trouve

$$I = 0,622,$$

la somme des erreurs commises (y compris celle qui provient de la suppression des décimales après la troisième) étant inférieure à $\frac{1}{2000}$.

Deuxième question.

L'angle $\widehat{HKC}$ est égal à 45° . La surface des segments échancrés est donc égale à $r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$.

1° En appelant z l'abscisse du centre de gravité cherché sur $\overrightarrow{OE}$, le théorème des moments par rapport à OA donne, en posant $h = AD = b + c + r\sqrt{2}$

$$z \left[2ah = 2r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2}h \times 2ah - 2r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(b + r\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

d'où l'on tire z .

2° On calcule le moment d'inertie du rectangle complet $\left(\frac{2}{3}a^3h \right)$ et l'on retranche le moment d'inertie des deux segments échancrés. On trouve

$$I = \frac{2}{3}a^3(b + c + r\sqrt{2}) - 2r^4 \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{7}{12} \right) - 4ar^3\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{5}{12} \right) - 4a^2r^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right).$$

3° Le volume engendré est égal à celui qu'engendre le rectangle complet $(\pi a^2 h)$ diminué de celui qu'engendrent les segments échancrés.

$$V = \pi a^2 h - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\pi xy \, dx.$$

On trouve

$$V = \pi a^2 h - \pi a r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \pi r^3 \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{6} \right).$$

(Grenoble, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. (*Analyse et Géométrie*). — C. 58. — I. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^2(1+x) \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Montrer qu'on peut trouver un changement de variable $x = \varphi(t)$, tel que la nouvelle équation différentielle reliant y à t soit à coefficients constants.

En déduire l'intégrale générale de l'équation proposée.

C. 59. — II. Calculer l'intégrale

$$\theta = \int_a^r \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}} \frac{dr}{2r}.$$

(On ne cherchera pas à calculer θ en fonction explicite de r , mais simplement à avoir r et θ en fonction d'un paramètre.)

III. Deux points M et M' se déplacent sur le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, avec des vitesses angulaires respectivement égales à $+3$ et -1 . Ils partent simultanément du point $x = a, y = 0$.

Trouver et construire l'enveloppe de la droite qui les joint.

Montrer que si dans le problème précédent on regarde r et θ comme les coordonnées polaires d'un point, les relations paramétriques trouvées représentent la même courbe que l'enveloppe ci-dessus.

(Strasbourg, juin 1922.)