

Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 215-217

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__215_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.25.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique, énoncé publié en décembre 1925, p. 94.*]

SOLUTION

par A. MONJALLON.

1. On demande d'intégrer le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}(1 + z + zx^2).$$

La première équation donne

$$z = \frac{1}{u - x^2},$$

u étant fonction arbitraire de y . Il vient alors

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{u'}{(u - x^2)^2},$$

et la seconde équation se transforme en une équation linéaire en u

$$u' = \frac{u + 1}{y},$$

qui a pour intégrale

$$u = Cy - 1.$$

La solution du système proposé est donc

$$z = \frac{1}{Cy - x^2 - 1}.$$

Elle dépend d'une constante arbitraire C , ce qui était à prévoir, le système proposé satisfaisant à la condition d'intégrabilité.

2. Pour que le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xz^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= F(x, y, z), \end{aligned}$$

admette une solution dépendant d'une constante arbitraire, il faut

qu'il vérifie la condition d'intégrabilité qui est

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2xz^2 \frac{\partial F}{\partial z} = 4xzF.$$

Cette équation aux dérivées partielles conduit au système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{2xz^2} = \frac{dF}{4xzF}.$$

Prenons trois intégrales premières, ce seront

$$\begin{aligned} y &= C_1, \\ \frac{1}{z} + x^2 &= C_2, \\ F &= C_3 z^2. \end{aligned}$$

La fonction $F(x, y, z)$ la plus générale sera alors

$$F(x, y, z) = z^2 \varphi \left(x^2 + \frac{1}{z}, y \right),$$

la fonction φ étant arbitraire.

Question C.12.

[Analyse supérieure; épreuve pratique; énoncé publié en novembre 1925, p. 55].

SOLUTION

par J. DE CAUMONT.

On demande de prouver que la surface S d'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{1+u^2}{u^2(1-u^2)^3} du^2 + \frac{2 du dv}{u(1-u^2)^3} + \frac{dv^2}{1-u^2}$$

est applicable sur une surface de révolution Σ , engendrée par une chaînette en tournant autour de sa base.

La variable v ne figurant pas dans l'élément linéaire donné, il convient à une surface de révolution dont les lignes $u = \text{const.}$ seront les parallèles. On mettra en évidence les trajectoires orthogonales de ces courbes en écrivant

$$ds^2 = \frac{1}{1-u^2} \left[dv + \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} \right]^2 + \frac{2 du^2}{(1-u^2)^3},$$

et il reste à identifier avec l'élément linéaire de Σ qui s'écrit

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire, parce que

$$\alpha^2 dr^2 = (r^2 - \alpha^2) dz^2,$$

$$d\sigma^2 = \frac{r^2}{r^2 - \alpha^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

On posera donc

$$r = \frac{k}{\sqrt{1-u^2}},$$

et l'égalité

$$\frac{2 du^2}{(1-u^2)^3} = \frac{r^2 dr^2}{r^2 - \alpha^2}$$

donne immédiatement

$$\alpha = k = \sqrt{2};$$

enfin

$$dv + \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{2} d\varphi.$$

La méridienne de la surface Σ a pour équation

$$r = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

On demandait enfin la valeur absolue de la torsion d'une ligne asymptotique de S . On sait que cette torsion est un élément géodésique et que, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux, on a

$$\left| \frac{1}{T} \right| = \frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}},$$

$\left| \frac{1}{T} \right|$ est donc égale à la racine carrée du module de la courbure totale, qui se conserve quand on passe de S à Σ .

Dans le cas présent, la courbure totale de Σ , surface de révolution minima, est égale en module au carré de la courbure de la chaînette $\frac{\alpha^2}{r^4}$.

Donc

$$\left| \frac{1}{T} \right| = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-u^2).$$