

Agrégation des sciences mathématiques (session de 1925)

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 200-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__200_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(SESSION DE 1925).

Problème de Calcul différentiel et intégral.

On désigne par k une constante positive, par $f(x)$ une fonction positive et continue pour toutes les valeurs positives de x , ayant une dérivée première continue; $f(x)$ peut d'ailleurs être discontinue pour $x = 0$. On considère alors l'intégrale de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + f(x) = 0,$$

définie par les valeurs initiales x_0 et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = x'_0$, pour
 $t = t_0$ ($x_0 > 0$).

1° Montrer qu'il existe un nombre positif T , fini ou infini, tel que l'intégrale $x(t)$ soit définie et positive à l'intérieur de l'intervalle $(t_0, t_0 + T)$, et tende vers zéro quand t tend vers $t_0 + T$.

Indiquer comment varie $x(t)$ dans cet intervalle.

2° Si $f(x)$ reste supérieure à un nombre positif quand x tend vers zéro, T possède une valeur finie. Il est d'ailleurs possible de choisir x_0 et x'_0 de manière que la valeur correspondante de T soit finie, pour toutes les fonctions $f(x)$ satisfaisant aux conditions du premier alinéa.

3° En désignant par $F(x)$ une fonction primitive de $-f(x)$ et posant

$$G(x) = 2 F(x) - 2 F(x_0) + x_0'^2,$$

démontrer que l'inégalité $\left|\frac{dx}{dt}\right| < \sqrt{G(x)}$ est vérifiée dans tout l'intervalle $(t_0, t_0 + T)$ et que si $x'_0 \leq 0$, il en est de même de l'inégalité

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| > \sqrt{G(x)} - k(x_0 - x).$$

Si $f(x)$ est, pour x voisin de zéro, un infiniment grand ayant pour partie principale $\frac{\mu}{x^{1+\alpha}}$ ($\alpha > 0$), déduire des deux inégalités précédentes la valeur principale de $x(t)$ en fonction de l'infiniment petit $(t_0 + T - t)$.

[On suppose, pour éviter toute difficulté accessoire, que les termes négligés dans l'expression de $f(x)$ sont d'un ordre déterminé et inférieur à $1 + \alpha$.]

4° Les hypothèses précédentes étant conservées et la fonction $\varphi_n(x)$ étant définie, à partir de la fonction $\varphi_0(x) = \sqrt{G(x)}$, par la formule de récurrence

$$\varphi_{n+1}(x) = |x'_0| - k(x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x)}{\varphi_n(x)} dx,$$

démontrer que, si x_0 est suffisamment petit, la fonction $\varphi_1(x)$ reste positive dans l'intervalle $(t_0, t_0 + T)$, que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, sont approchées alternativement par excès et par défaut de $-\frac{dx}{dt}$ regardée comme fonction de x , et qu'elles forment une suite convergente dans tout l'intervalle $(x_0, 0)$.

5° Supposons maintenant que $f(x)$ soit holomorphe pour $x = 0$ et développable en série de la forme

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

les a_n étant positifs ou nuls, et posons

$$y = -kx + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

$$z = -kx + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n x^n,$$

les α_n et les β_n étant respectivement déterminés par la condition que y et z vérifient formellement les équations

$$(2) \quad y \left(k + \frac{dy}{dx} \right) + f(x) = 0,$$

$$(3) \quad z \left(k + \frac{z}{x} \right) + f(x) = 0.$$

Comparer les valeurs de α_n et β_n et en déduire que la série y

possède, comme la série z un rayon de convergence fini. Montrer que ce résultat subsiste quand certains des a_n sont négatifs.

6° Dédurre de ce qui précède que si $f(x)$ est de la forme considérée au n° 5, il existe une intégrale positive $x(t)$, de l'équation (1), pour laquelle T est infini, $x(t)$ étant développable suivant les puissances d'exposants positifs et entiers de $e^{-k(t-t_0)}$.

Montrer, par un exemple simple, qu'il n'en est plus toujours ainsi quand $f(x)$ est de la forme

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

avec $a_1 > 0$.

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Le procédé classique ramène l'équation

$$(1) \quad x'' + kx' + f(x) = 0$$

au système

$$(2) \quad y \frac{dy}{dx} + ky + f(x) = 0,$$

$$(3) \quad t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}.$$

L'équation (2) n'est pas intégrable dans le cas général; le cas simple $f(x) \equiv a_1 x + a_2$, où a_1 et a_2 sont constants, s'intègre directement sous forme (1) sans passer par (2). Il est commode, pour abréger le langage, d'appeler t le *temps*, $x' = \frac{dx}{dt}$ et $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ *vitesse* et *accélération*.

L'inégalité du texte

$$(4) \quad |x'| < \sqrt{G(x)}$$

est fournie immédiatement par l'équation des forces vives, obtenue en multipliant (1) par $2x'$, puis intégrant; d'où, avec les notations de l'énoncé

$$(5) \quad x'^2 = G(x) - 2k \int_{t_0}^t x'^2 dt.$$

Cela prouve de plus que $G(x)$ est positive, si l'on y remplace x par $x(t)$; si donc ξ est un zéro positif de $G(x)$, comme $G(x)$ est une fonction décroissante de x , quand x est positif, la fonction $x(t)$ ne pourra dépasser ξ ; exemple simple :

$$f(x) \equiv ax, \quad \text{avec } a > 0, \quad \xi = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{a}}.$$

On peut, d'autre part, remarquer que, si k ne doit pas prendre diverses valeurs constantes, on peut, sans particulariser, supposer $k = 1$; car le changement de fonction et variable

$$(6) \quad kt = T, \quad x = X, \quad F(X) \equiv \frac{f(x)}{k^2}$$

donne la nouvelle équation

$$(7) \quad \frac{d^2 X}{dT^2} + \frac{dX}{dT} + F(X) = 0,$$

et, si l'on adopte ensuite de petites lettres, on retrouve l'équation du début avec $k = 1$.

I, II. Deux cas suivant que l'on a $x'_0 > 0$ ou $x'_0 < 0$.

Si l'on suppose $x'_0 > 0$, x''_0 est négatif, donc x' décroît pendant un certain temps : nous allons montrer que, si pour $x > x_0$, $f(x)$ a une limite inférieure m positive non nulle, le laps de temps où x' reste positif et non nul est fini.

Supposons t tel que, de t_0 à t , x' reste positif, non nul, de sorte que $x > x_0$. On écrit

$$(8) \quad x'' = -kx' - f(x),$$

$$(9) \quad x' = x'_0 - k(x - x_0) - \int_{t_0}^t f(x) dt.$$

La valeur (9) de x' , puisque $x > x_0$ et $f(x) > m$, est évidemment inférieure à $x'_0 - m(t - t_0)$ et, comme x' est supposée positive, on a

$$(10) \quad t - t_0 < \frac{x'_0}{m}.$$

Donc, entre l'époque t_0 et l'époque $t_0 + \frac{x'_0}{m}$, il existe une époque θ où la vitesse $x'(\theta)$ s'annule, tandis que l'accéléra-

tion $x''(\theta)$ se réduit à $-f[x(\theta)]$, valeur non nulle et négative; la vitesse, à l'époque θ , continue donc à décroître, devient négative. Un décalage de l'origine des temps nous autorise donc à nous borner désormais à l'hypothèse $x'_0 < 0$: c'est ce que fait d'ailleurs l'énoncé :

Soit donc $x'_0 < 0$: nous allons voir que $x(t)$ décroît et atteint en un temps fini tout point $x_1 (0 \leq x_1 < x_0)$, tel qu'entre x_0 et x_1 la limite inférieure de $f(x)$ soit un nombre m positif non nul.

(Pour simplifier l'écriture, supposons $k = 1$). L'équation

$$x'' = -x' - f(x)$$

montre que, si $|x'_0| < f(x_0)$, x''_0 est négatif; donc x' décroît au début et par suite la quantité positive $|x'|$ croît : ce résultat vaut tant que $|x'|$ reste inférieur à $f(x)$.

Au contraire, si $|x'_0| > f(x_0)$, x' croît d'abord, donc $|x'|$ décroît; cela vaut tant que $|x'|$ surpasse $f(x)$, ce qui ne peut avoir lieu que si $|x'|$ surpasse m .

Conclusion. — Si au début du mouvement on a $|x'_0| > m$, $|x'(t)|$ peut avoir des alternatives de croissance ou décroissance, mais il reste toujours supérieur à m ; si, au début du mouvement, on a $|x'_0| < m$, $|x'(t)|$ croît au moins au début; s'il n'atteint pas m , il reste supérieur à $|x'_0|$; s'il atteint m , il ne peut plus retomber en dessous de m . De toutes façons $|x'|$ reste supérieur au plus petit des deux nombres $|x'_0|$, m et l'intervalle $x_0 x_1$ est couvert en un temps inférieur au plus grand des deux nombres

$$\frac{x_0 - x_1}{m}, \quad \frac{x_0 - x_1}{|x'_0|},$$

le mobile se dirigeant toujours de x_0 vers l'origine.

Si donc la limite inférieure de $f(x)$ entre x_0 et 0 est un nombre positif non nul, le temps T de l'énoncé est fini.

Supposons qu'entre ε (ε positif très petit) et x_0 la limite inférieure de $f(x)$ soit positive non nulle, mais que $f(x)$ tende vers zéro si x tend vers zéro [autrement dit $f(+0) = 0$; la valeur exacte de $f(0)$, puisque l'énoncé admet une discontinuité pour $x = 0$, importe peu]. Nous choisirons des nombres x_0 ,

$x_1, \dots, x_n, \dots$ tendant vers zéro d'après une loi arbitraire, en décroissant constamment quand n croît. Le temps T_n , nécessaire pour atteindre x_n , croît avec n ; si n devient infini, T_n peut rester fini, il peut devenir infini; on pourra étudier la série dont le terme général est le temps nécessaire pour parcourir le segment $x_{n-1}x_n$. Des exemples simples prouvent l'existence effective des deux cas. Ainsi, A étant une constante positive, inférieure à $\frac{1}{2}$, l'équation

$$(11) \quad x'' + x' + \left(\frac{1}{4} - A^2\right)x = 0$$

donne, avec des constantes α, β ,

$$(12) \quad x = \alpha e^{-\left(\frac{1}{2} - A\right)t} + \beta e^{-\left(\frac{1}{2} + A\right)t}.$$

Si l'on a $\alpha > 0, \beta > 0$, x n'atteint l'origine qu'en un temps T infini; si $\alpha\beta < 0$, T est fini; *pour cet exemple, les circonstances changent suivant les valeurs initiales respectives de x_0 et x'_0 .*

Au contraire, pour

$$(13) \quad x'' + x' + \left(\frac{1}{4} + A^2\right)x = 0,$$

on a

$$(14) \quad x = \alpha e^{-\frac{t}{2}} \cos(At + \beta),$$

et quelle que soit l'intégrale, T est fini.

Il est intéressant de montrer que, quelle que soit $f(x)$, il y a toujours certaines intégrales (sinon toutes) pour lesquelles T est fini.

Pour cela, démontrons en nous bornant à $x'_0 < 0$, l'inégalité

$$(15) \quad |x'| > \sqrt{G(x)} - (x_0 - x).$$

En effet, posons

$$(16) \quad x' = y = -Y,$$

de sorte que l'équation du début (2) devient (avec $k = 1$),

$$(17) \quad \frac{dY}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{Y}.$$

De (17) on déduit, puisque $Y_0 = -x'_0$,

$$(18) \quad Y = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{Y}.$$

Au second membre, remplaçons Y par la quantité plus grande $\sqrt{G(x)}$, on a

$$(19) \quad Y > -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{\sqrt{G(x)}}.$$

Comme $G(x)$ est différent de zéro, le second membre de (19) a toujours un sens : il est manifestement supérieur à $-x'_0 - (x_0 - x)$, puisque $x < x_0$; il est aussi *a fortiori* supérieur à $-x'_0 - x_0$.

Si donc on suppose $x'_0 < 0$ et $-x'_0 - x_0 > 0$, la fonction Y reste toujours supérieure à $-x'_0 - x_0$ et, quelle que soit $f(x)$, on a

$$T < \frac{x_0}{|x'_0| - x_0}.$$

Le résultat demandé par l'énoncé pour T se trouve ainsi obtenu, sans se servir de l'inégalité (15); mais pour obtenir (15), il suffit dans (19) de remplacer $f(x)$ par $-\frac{1}{2}G'(x)$ pour voir que la quadrature s'effectue et comme $\sqrt{G(x_0)}$ est le nombre positif $(-x'_0)$, on voit que (19) se réduit à (15). D'ailleurs, sous cette forme (15), on peut remarquer que $G(x)$ étant décroissant, $\sqrt{G(x)}$ reste, pour $x < x_0$, supérieur à $\sqrt{G(x_0)}$ et l'on retrouve encore le résultat $|x'| > |x'_0| - x_0$.

Remarque. — Pour démontrer que, si x'_0 est positif, le mobile rétrograde effectivement, on a dû supposer que pour $x > x_0$, la limite inférieure m de $f(x)$ est positive, non nulle. Cette hypothèse est nécessaire, comme le prouve l'exemple suivant, obtenu en déterminant $f(x)$ a priori de façon que l'équation

$$x'' + x' + f(x) = 0$$

admette une intégrale particulière

$$x = \xi - A_1 e^{-t} - A_2 e^{-2t},$$

où A_1, A_2, ξ sont des constantes positives, arbitraires sauf la

restriction $\xi - A_1 - A_2 > 0$. On a aussitôt

$$f(x) = 2A_2 e^{-2t}, \quad x' = A_1 e^{-t} + 2A_2 e^{-2t}.$$

Prenons $t_0 = 0$; t croissant de 0 à $+\infty$, x croît de $\xi - A_1 - A_2$ à ξ pendant que $f(x)$ décroît de $2A_2$ à 0; le mobile ne rétrograde donc pas; la relation entre x et $f(x)$ s'obtient évidemment en éliminant θ entre

$$x = \xi - A_1 \theta - A_2 \theta^2, \quad f = 2A_2 \theta^2.$$

La courbe (x, f) est une parabole tangente à Ox au point ξ de Ox ; l'arc de cette parabole, obtenu pour θ positif, est celui qui correspond à $0 < x < \xi$ et est situé au-dessous du diamètre conjugué de Ox ; en arrivant au point $(\xi, 0)$, on peut prolonger l'arc de parabole par une courbe arbitraire partant de ce point tangentiellement à Ox et nous définissons ainsi une fonction $f(x)$ satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé; sauf une : la limite inférieure de $f(x)$ est en effet, pour $x > 0$, nulle.

De même, si x'_0 est négatif et si la fonction $f(x)$ admet un zéro ξ compris entre 0 et x_0 , on fait le changement de variables

$$x = \xi + X, \quad f(\xi + X) = F(X),$$

et l'on a l'équation

$$X'' + X' + F(X) = 0,$$

qui montre que ξ joue maintenant le rôle de O dans ce qui précède : le mobile peut donc atteindre ξ avec une vitesse finie, donc le dépasser pour se rapprocher d'avantage de O ; ou bien il peut arriver en ξ avec une vitesse nulle, en un temps fini, et il s'arrête en ξ ; ou bien il peut n'atteindre ξ qu'en un temps infini.

III. Supposons, au voisinage de $x = 0$,

$$f(x) = \frac{\mu}{x^{1+\alpha}} + \dots, \quad G(x) = \frac{2\mu}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} + \dots$$

Puisque $\frac{dx}{dt}$ est négatif, pour x positif et voisin de zéro, et que $\frac{dx}{dt}$ est compris entre $-\sqrt{G(x)}$ et $-\sqrt{G(x)} + x_0 - x$, on peut écrire

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha}} \varphi(t_0 + T - t),$$

où $\varphi(u)$ tend vers 1 si u tend vers zéro. En posant $u = t_0 + T - t$, nous écrirons

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{x^2} dx &= \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}} [1 + \psi(u)] du, \\ \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\alpha}{2}} &= u \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}} [1 + \chi(u)], \\ x &= \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}} \right\}^{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}} u^{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}} [1 + F(u)], \end{aligned}$$

φ, χ, F étant des fonctions de u tendant vers zéro si u tend vers zéro; x est donc infiniment petit d'ordre $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}$ et cette formule

donne la partie principale.

IV. La forme donnée à l'équation du début, en supposant $k=1$, $x' = \gamma = -Y$, est, nous l'avons vu,

$$(20) \quad \frac{dY}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{Y}.$$

Cela nous suggère une méthode d'approximation évidente : bornons-nous au cas où x'_0 est négatif, et où le nombre

$$(21) \quad \mu = -x'_0 - x_0$$

est positif, non nul. Ces hypothèses n'ont rien d'arbitraire, puisque nous avons vu leur signification : *T est fini, quelle que soit $f(x)$ et Y reste positive, non nulle, quand x décroît de x_0 à 0; Y surpasse μ .* Au second membre de (20) prenons, comme approximation de Y, une fonction qui, de 0 à x_0 , reste positive, non nulle, $\varphi_n(x)$, avec la condition $\varphi_n(x_0) = Y_0 = -x'_0$; on en déduit une nouvelle approximation $\varphi_{n+1}(x)$ par la relation

$$(22) \quad \frac{d\varphi_{n+1}}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{\varphi_n}$$

jointe à

$$(23) \quad \varphi_{n+1}(x_0) = -x'_0.$$

On en déduit, avec $0 < x < x_0$,

$$(24) \quad \varphi_{n+1}(x) = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{\varphi_n(x)}.$$

C'est précisément la formule de l'énoncé; l'intégrale du second membre a un sens, puisque φ_n ne s'annule pas entre 0 et x_0 , d'autre part elle est *positive*; donc nous avons évidemment

$$(25) \quad \varphi_{n+1}(x) > -x'_0 - (x_0 - x) > -x'_0 - x_0.$$

Nous voyons que $\varphi_{n+1}(x)$ reste constamment, pour $0 \leq x \leq x_0$, supérieure au nombre positif μ déjà défini; donc φ_{n+1} peut servir, sans difficulté, pour définir une nouvelle approximation φ_{n+2} , et ainsi de suite : la fonction φ_0 peut être prise quelconque, pourvu qu'elle soit positive, non nulle, de 0 à x_0 compris; les suivantes, non seulement, seront positives, mais encore supérieures à μ . Or il est naturel de prendre $\varphi_0 \equiv \sqrt{G(x)}$, car si, au lieu de faire $k=1$, nous laissons k constant mais arbitraire, l'équation

$$\frac{dY}{dx} = k - \frac{f(x)}{Y}$$

admet, pour k voisin de zéro, une intégrale voisine de $\sqrt{G(x)}$ qui est intégrale de l'équation obtenue pour $k=0$.

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{f(x)}{Y}.$$

Avec ce choix particulier de φ_0 , la fonction φ_1 devient celle calculée plus haut, $\varphi_1 = \sqrt{G(x)} - (x_0 - x)$; φ_0 surpasse Y , φ_1 lui est inférieure, et la différence $\varphi_0 - \varphi_1$ ou $(x_0 - x)$ surpasse $\varphi_0 - Y$ ou $Y - \varphi_1$. En adjoignant à (24) l'équation

$$(26) \quad Y = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{Y},$$

on a, par différence,

$$(27) \quad Y - \varphi_{n+1} = \int_x^{x_0} \frac{(\varphi_n - Y) f dx}{Y \varphi_n},$$

de sorte que si $\varphi_n(x)$ est toujours supérieure (ou inférieure) à Y , $\varphi_{n+1}(x)$ est toujours inférieure (ou supérieure) à Y . Les fonctions d'indice pair $\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}, \dots$ sont donc approchées par excès,

celles d'indice impair $\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{2n+1}, \dots$ approchées par défaut; toutes sont, pour $0 \leq x \leq x_0$, supérieures au nombre positif μ .

Soit M la limite supérieure, supposée finie de $f(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq x_0$ (cette hypothèse sur M écarte les fonctions du paragraphe 3, infinies pour $x = 0$; pour une telle fonction, le raisonnement s'appliquerait dans un intervalle $x_1 \leq x \leq x_0$, où x_1 est un nombre positif non nul). Appliquons la formule (27) pour $n = 1$, en remplaçant au second membre $Y - \varphi_1$ par la quantité positive supérieure $(x_0 - x)$, et $Y\varphi_1$ au dénominateur par la quantité positive inférieure μ^2 ; on a

$$(28) \quad \varphi_2 - Y < \int_x^{x_0} \frac{M}{\mu^2} (x_0 - x) dx = \frac{M}{\mu^2} \frac{(x_0 - x)^2}{2!}.$$

Le même procédé, appliqué toujours à (27), démontre de proche en proche

$$(29) \quad |Y - \varphi_{n+1}| < \frac{M^n}{\mu^{2n}} \frac{(x_0 - x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La formule (29) démontre la convergence de la suite $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$; l'erreur dont nous connaissons le sens, décroît, en valeur absolue comme les termes successifs du développement de l'exponentielle $e^{\frac{M(x_0-x)}{\mu^2}}$. On remarquera que le raisonnement peut être recommencé en prenant pour $\varphi_0(x)$ une fonction positive *quelconque*, égale à $-x'_0$ pour $x = x_0$, supérieure, de 0 à x_0 compris, à un nombre positif fixe; si φ_0 est toujours supérieure (ou inférieure) à Y , les fonctions $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2n}, \dots$ posséderont la même propriété, les fonctions $\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{2n+1}, \dots$ seront approchées de Y en sens inverse; toutes, quelle que soit la parité de l'indice, étant supérieures à μ , sauf peut-être φ_0 . Quand l'indice augmente indéfiniment, la fonction φ_n tend vers Y .

Si l'on suppose que φ_0 est, par intervalles, supérieure, soit inférieure à Y , le résultat subsiste sauf que l'on ne peut rien garantir sur le sens de l'approximation de φ_n .

Ayant écrit comme plus haut, dans ces nouvelles hypothèses,

$$Y - \varphi_1 = \int_x^{x_0} \frac{(\varphi_0 - Y)f dx}{Y\varphi_0},$$

si l'on appelle δ la limite supérieure de $|\varphi_0 - Y|$ dans l'inter-

valle $0 \leq x \leq x_0$, on trouve immédiatement

$$\begin{aligned} |Y - \varphi_1| &< \frac{\delta M}{\mu^2} (x_0 - x), \\ |Y_n - \varphi_n| &< \frac{\delta}{n!} \left[\frac{M(x_0 - x)}{\mu^2} \right]^n, \end{aligned}$$

de sorte que la vitesse d'approximation ne dépend pas finalement du choix de telle fonction initiale φ_0 plutôt que d'une autre.

V. Faisons $k = 1$; on détermine $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$, par l'égalité

$$(30) \quad \begin{aligned} (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)(2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots) \\ + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots = x[2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Si donc on calcule d'abord

$$(31) \quad \frac{1}{2}(\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^2 \equiv A_4 x^4 + A_5 x^5 + \dots + A_n x^n + \dots,$$

on a

$$(32) \quad A_4 = \frac{\alpha_2^2}{2}, \quad A_5 = \alpha_2 \alpha_3, \quad A_6 = \frac{\alpha_3^2}{2} + \alpha_2 \alpha_4 \dots,$$

d'une façon générale A_n est un polynome entier à coefficients *positifs* des variables $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}$.

$$A_n = P_n(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}).$$

On aura donc

$$(33) \quad \begin{cases} 2\alpha_2 = \alpha_2, \\ 3\alpha_3 = \alpha_3 + 4A_4, \\ \dots\dots\dots, \\ n\alpha_n = \alpha_n + (n-1)A_{n-1}. \end{cases}$$

On calcule de proche en proche $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Si l'on ne suppose rien sur le signe (ou même sur la réalité) de $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, on voit que, remplacer $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ par $|\alpha_2|, |\alpha_3|, \dots$, augmente le module de $\alpha_2, \alpha_3, \dots$. On augmente encore $|\alpha_2|, |\alpha_3|, \dots$, si l'on remplace chaque α_n par une quantité positive de module supérieur.

Si tous les α_n sont positifs, tous les α_n le sont aussi.

Le calcul de z donne

$$(34) \quad \frac{1}{x}[\beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots]^2 + \alpha_2 x^2 + \dots \equiv \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots,$$

donc on a

$$(35) \quad \begin{cases} \beta_2 = a_2, \\ \beta_3 = a_3 + 2B_4, \\ \dots\dots\dots, \\ \beta_n = a_n + 2B_{n+1} \end{cases}$$

avec

$$B_n = P_n(\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-2}),$$

P_n étant le même polynome que précédemment (chaque lettre α_i étant remplacée par β_i). Cela nous montre que, si tous les a_n sont positifs, on a

$$(36) \quad \beta_2 > a_2, \quad \beta_3 > a_3, \quad \dots, \quad \beta_{n-1} > a_{n-1}, \quad \dots$$

La première inégalité est vérifiée directement, les autres résultent de la comparaison

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{a_n}{n} + \frac{n+1}{n} A_{n+1}, \\ \beta_n &= a_n + 2B_{n+1}. \end{aligned}$$

Si les a_n ne sont pas tous positifs, on a, pour la même raison,

$$|\beta_2| > |\alpha_2| \dots |\beta_{n-1}| > |\alpha_{n-1}|.$$

Si donc la série z est convergente, *a fortiori* la série y l'est. Or on calcule directement z par une équation du second degré : en choisissant convenablement la racine

$$(37) \quad z = -\frac{x}{2} - \frac{x}{2} [1 - 4x(a_2 + a_3x + \dots)]^{\frac{1}{2}}.$$

La série $a_2 + a_3x + \dots$ étant supposée avoir un rayon de convergence non nul, on peut effectivement développer z par la formule (37) suivant une série convergente de rayon de convergence non nul; et alors la série y a un rayon de convergence au moins égal.

VI. Nous posons

$$(38) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad e^{-(t-t_0)} = \theta, \quad X = \frac{x}{\theta}.$$

Le calcul du numéro précédent nous a fourni une équation différentielle du premier ordre, *ne renfermant aucune constante arbitraire*

$$(39) \quad \frac{dx}{dt} = -x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

dont toutes les intégrales satisfont à l'équation (E) du début. On a immédiatement

$$(40) \quad \frac{dX}{d\theta} = \frac{\theta \frac{dx}{d\theta} - x}{\theta^2} = \frac{\frac{dx}{dt} - x}{\theta^2},$$

$$(41) \quad \frac{dX}{d\theta} = -\alpha_2 X^2 - \alpha_3 \theta X^3 - \alpha_4 \theta^2 X^4 - \dots$$

Or, l'équation (41) admet une intégrale holomorphe et une seule se réduisant pour $\theta = 0$ à X_0 , où X_0 est *arbitraire*.

$$(42) \quad X = X_0 + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \dots,$$

d'où pour $x = X\theta$ le développement annoncé, convergent pour θ suffisamment petit ou $t - t_0$ suffisamment grand. Il faut bien remarquer que l'équation (41) est strictement équivalente à (39) et par suite ne peut donner des fonctions $x(t)$ dépendant de deux constantes arbitraires; or $\beta_1, \beta_2, \dots$, coefficients du développement (42) dépendent de la valeur particulière X_0 et θ contient la constante t_0 : si l'on multiplie X par une constante arbitraire et si l'on divise θ par la même constante, l'équation (41) ne change pas et finalement le produit $X\theta$ contient bien les deux constantes X_0 et t_0 , mais uniquement par le groupement $X_0 e^{t_0}$; pour X_0 nul, on aurait $X \equiv 0, x \equiv 0$, cas à écarter; on pourra donc sans restreindre supposer $X_0 = 1$; on a ainsi ∞ intégrales $x(t)$ du type demandé par l'énoncé, ne différant les unes des autres que par un décalage de l'origine des temps.

Il est évident qu'un tel développement $x(t)$ n'existe *jamais* si a_1 est différent de zéro: c'est une conclusion plus précise, plus restrictive que celle de l'énoncé. En effet, écrivons en supposant t_0 égal à zéro, ce qui ne restreint rien,

$$(43) \quad x = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + \dots + A_n e^{-nt} + \dots$$

On a

$$(44) \quad f(x) = -(x' + x'') = -2A_2 e^{-2t} - \dots - n(n-1)A_n e^{-nt} - \dots$$

La relation entre x et $f(x)$ est fournie par l'élimination de e^{-t} entre les équations (43) et (44). Or, distinguons deux cas: $A_1 \neq 0$ et $A_1 = 0$. Soit le premier cas: $A_1 \neq 0$; appelons n le premier entier ≥ 2 pour lequel $A_n \neq 0$; on aura donc $A_1 > 0$,

$A_n < 0$ pour que x et $f(x)$ soient positifs tous les deux quand t est positif, suffisamment grand; e^{-t} est développable en série $\frac{x}{A_1} + \dots$, de sorte que l'on obtient pour $f(x)$ le développement

$$(45) \quad f(x) \equiv -n(n-1)A_n \left(\frac{x}{A_1}\right)^n + \dots,$$

où a_1 est nul.

Dans le second cas, $A_1 = 0$, soit toujours A_n le premier coefficient non nul ($n \geq 2$); on voit que $f(x)$ et x sont de signe contraire pour t positif suffisamment grand de sorte que nous ne sommes plus dans les conditions strictes de tout le problème. En tous cas, l'équation (43) permet d'obtenir le développement de e^{-t} suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{1}{n}}$ et l'on a

$$(46) \quad f(x) \equiv -n(n-1)x + \dots$$

Le développement (46) commence par un terme $a_1 x$, où a_1 a la valeur *negative* d'ailleurs très particulière $-n(n-1)$; ce développement (46) devient d'ailleurs holomorphe si dans (43) les indices des termes non nuls sont tous multiples de l'entier n . L'exemple simple où $f(x) \equiv \left(\frac{1}{4} - A^2\right)x$, donné plus haut, confirme aussi ces résultats; les intégrales particulières $x = \alpha e^{-\left(\frac{1}{2}-A\right)t}$ ou $x = \beta e^{-\left(\frac{1}{2}-A\right)t}$ ne sont pas du type demandé; le multiplicateur de t dans l'exposant est en effet différent de (-1) du moins tant que a_1 est supérieur à zéro, sans égalité.