

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 179-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__179_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. Les axes $Oxyz$ étant rectangulaires, on projette chaque point M de l'espace en m sur le plan xOy , en μ sur Oz et l'on considère la droite μm .

Trouver les surfaces S telles que le plan tangent en un point quelconque M de cette surface soit parallèle à la droite $m\mu$ correspondante. Équation E de ces surfaces.

2. Former les équations des caractéristiques sans tenir compte de ce fait que l'équation E obtenue est linéaire; intégrer complètement le système différentiel obtenu.

Montrer qu'il existe des surfaces développables à deux paramètres, solutions de E , et les déterminer.

3. Déterminer directement la méridienne des surfaces de révolution, solutions de E (utiliser la propriété géométrique de définition, n° 1).

4. Soit une surface S quelconque solution de E ; on la fait tourner autour de Oz ; montrer qu'elle reste solution : que peut-on dire de la surface Σ enveloppe de S dans ce mouvement ?

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'équation E est

$$(1) \quad px + qy + z = 0,$$

admettant pour intégrale générale

$$(2) \quad zx = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les ∞^1 hyperboles équilatères d'équation

$$(3) \quad zx = C,$$

dans le plan zOx , se transforment par une rotation autour de Oz en ∞^2 hyperboles, parmi lesquelles on prélève, suivant une loi arbitraire, une famille ∞^1 pour former la surface intégrale générale.

On obtient, en particulier, les surfaces de révolution

$$(4) \quad z\sqrt{x^2 + y^2} = C,$$

et les surfaces (cylindres hyperboliques)

$$(5) \quad z(ax + by) = 1,$$

qui sont les surfaces développables demandées par l'énoncé. D'ailleurs, si l'on exprime que les surfaces (2) sont développables on trouve la condition

$$ff'' - 2f'^2 = 0,$$

d'où les cylindres (5).

Le système complet des équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z} = \frac{dp}{-2p} = \frac{dq}{-2q}$$

donne la combinaison intégrable

$$\frac{p}{q} = \text{const.},$$

qui conduit manifestement à une développable.

Toute surface intégrale reste évidemment surface intégrale par une rotation autour de Oz. C'est un résultat classique qu'une enveloppe d'intégrales est elle-même intégrale. L'enveloppe obtenue ici est manifestement de révolution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Intégrer

$$x^2(y' + y^2) + xy + 1 = 0.$$

Remarquer que l'équation admet des intégrales de la forme $\frac{A}{x}$ (A const.), ou poser

$$y = \frac{z'}{z}.$$

Exprimer l'intégrale réelle par formules débarrassées de tout symbole imaginaire.

II. Chercher les asymptotiques de la surface

$$x = 3u + 3v, \quad y = 3u^2 + 3v^2, \quad z = 2u^3 + 2v^3.$$

L'asymptotique $u = v$ est une hélice. La surface est réglée. Montrer que la surface est le lieu des milieux des sécantes doubles d'une asymptotique gauche quelconque.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'équation donnée admet évidemment $\frac{\pm i}{x}$ pour intégrales particulières. Les procédés réguliers, indiqués par l'énoncé, conduisent aisément au résultat, surtout le second, consistant à poser

$$y = \frac{z'}{z}.$$

Un autre procédé simple consiste à prendre pour inconnue

$$Y = xy,$$

de sorte que

$$Y = \pm i$$

est solution de l'équation de Riccati en Y . On trouve

$$xY' + Y^2 + 1 = 0,$$

qui s'intègre aussitôt en séparant les variables.

II. La surface proposée est la surface bien connue du troisième degré de Cayley, qui est surface de translation de ∞^1 modes différents. L'équation des asymptotiques est

$$du = \pm dv.$$

Les génératrices rectilignes sont les asymptotiques

$$u + v = \text{const.}$$

(Lille, novembre 1925.)

C.53. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ tracées sur la surface (S) représentée par

$$x = v \cos u - a \sin u, \quad y = v \sin u + a \cos u, \quad z = au,$$

a est une constante positive.

2° Asymptotiques de (S).

3° Montrer que les surfaces

$$(H) \quad 4x^2 + 4y^2 = (z + c)^2 + 4a^2,$$

où c est une constante arbitraire, coupent (S) suivant une famille d'asymptotiques.

4° Trouver les surfaces (Σ) qui coupent orthogonalement les surfaces (H).

5° Indiquer la forme des sections de (Σ) par le plan $y = 0$.

6° Montrer qu'il existe entre les rayons de courbure principaux en un point M de (S) une relation qui ne dépend pas des coordonnées de M.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer les rayons de courbure et de torsion, de la courbe gauche définie par les équations

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad z = ha \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

a et h désignant des constantes.

II. Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx} dx}{(1+x^2)^3} \quad (i = \sqrt{-1}, m > 0)$$

prise le long de l'axe des quantités réelles.

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx dx}{(1+x^2)^3}.$$

III. Décomposer en éléments simples la fonction elliptique

$$f(u) = \frac{1}{p(2u) - pu},$$

pu étant la fonction elliptique de Weierstrass construite avec les périodes 2ω et $2\omega'$.

(Lyon, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne en coordonnées rectangulaires une surface réglée (S) engendrée par la droite (D) qui a pour équations

$$x = uz + U, \quad y = (au + b)z + U_1,$$

a et b étant des constantes, U et U_1 des fonctions du paramètre u.

1° Sur la projection orthogonale (Δ) de (D) sur le plan xOz on prend le point A de coordonnées

$$x = uf(u) + U, \quad y = 0, \quad z = f(u).$$

Déterminer la fonction $f(u)$ de façon que le point A décrive une trajectoire orthogonale de (Δ);

2° Déterminer les fonctions U et U_1 de façon que les lignes asymptotiques non rectilignes de (S) se projettent orthogonalement sur le plan xOz suivant les trajectoires orthogonales de (Δ). Quelle est alors la nature de la surface (S)? Que sont alors les trajectoires orthogonales de (Δ)?

II. Calculer l'intégrale

$$\int_c \frac{e^z(2-z)}{(z-1)^2} L(z^2-1) dz$$

prise le long d'une circonférence (C) ayant pour centre l'origine, un rayon égal à $\sqrt{2}$ et à partir du point $z = \sqrt{2}$ la détermination initiale de $L(z^2-1)$ étant zéro.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° $f(u)$ doit vérifier l'équation

$$f'(u) + \frac{u}{u^2+1}f(u) + \frac{uU'}{u^2+1} = 0,$$

facile à intégrer explicitement.

2° Identifiant avec la précédente l'équation qui donne z en fonction de u pour les asymptotiques on obtient

$$U'' = 0, \quad U'_1 - aU' = \frac{\lambda}{u^2+1} \quad (\lambda \text{ const.}),$$

équations qui donnent U et U_1 ; par changement convenable d'origine on voit que S est un conoïde dont l'axe est perpendiculaire à xOz . De là résulte que les Δ sont concourantes et que les projections des lignes asymptotiques sont des cercles concentriques.

II. Une intégration par parties conduit à une nouvelle intégrale sans logarithme calculable par application régulière du théorème classique des résidus.

EPREUVE PRATIQUE. — On donne, en coordonnées rectangulaires, un point S de coordonnées $x = 0, y = 0, z = a$ et une parabole ayant pour équations

$$y^2 - 2ax = 0, \quad z = 0.$$

On considère le cône (C) qui a pour sommet S et pour directrice la parabole et d'autre part la sphère (Σ) ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - az = 0.$$

On demande de calculer : 1° l'aire de la surface du cône intérieure à la sphère; 2° l'aire de la surface de la sphère intérieure au cône.

Nota. — Pour la première partie on pourra exprimer les coordonnées d'un point du cône à l'aide des deux paramètres u, v définis par

$$x = u, \quad \frac{y}{x} = v.$$

Pour la deuxième partie, si P est un point de la sphère, la droite SP rencontre le plan xOy en un point de coordonnées $\xi, \eta, 0$ et l'on exprimera les coordonnées de P en fonction de ξ, η .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Le calcul des deux intégrales doubles par les procédés classiques ordinaires ne présente aucune difficulté et donne comme résultats

$$\frac{3\pi a^2 \sqrt{2}}{16}, \quad \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}.$$

(Bordeaux, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne les équations paramétriques suivantes d'une surface (S)

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u, v).$$

1° Déterminer la fonction $f(u, v)$ de façon que les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ forment deux systèmes conjugués de la surface (S).

2° Déterminer la fonction $f(u, v)$ de telle sorte que le point P de rencontre avec Oz du plan tangent à la surface en un point $u = u_0$, $v = v_0$ reste le même si v_0 varie, u_0 restant fixe.

Expliquer géométriquement pourquoi dans ces deux cas on trouve la même expression pour $f(u, v)$.

3° Déterminer $f(u, v)$ de façon que les courbes $u = \text{const.}$ soient toutes des courbes planes conjuguées des courbes $v = \text{const.}$ Quelle est alors l'équation cartésienne de la surface (S)? Quelle définition géométrique peut-on en déduire pour cette surface en supposant les axes rectangulaires?

II. On considère la différentielle totale à trois variables indépendantes

$$(yz - y^3) dx + (xy^2 + zx) dy + \varphi(x, y) dz,$$

déterminer la fonction $\varphi(x, y)$ des deux variables x et y de façon que la différentielle totale précédente soit complètement intégrable.

La fonction $\varphi(x, y)$ étant ainsi choisie, intégrer l'équation obtenue en égalant à zéro la différentielle totale.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les deux premières parties conduisent à la même équation

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} u = 0, \quad f = uV + U,$$

la coïncidence des deux résultats est une conséquence immédiate du théorème classique de M. Königs sur les lignes conjuguées.

Pour la troisième partie, f doit être de la forme précédente, V étant une fonction linéaire de $\sin v$ et $\cos v$. La surface est de la forme générale

$$x^2 + y^2 = F(P) \quad (P \text{ fonction linéaire de } x, y, z)$$

et elle est engendrée par l'ellipse variable

$$x^2 + y^2 = F(\lambda), \quad P = \lambda,$$

dont la loi de variation est évidente.

II. Par un groupement évident de termes on peut, en posant $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, écrire la différentielle totale considérée sous la forme

$$z du + u^2 dv + \varphi(u, v) dz,$$

la condition classique d'intégrabilité donne, puisque φ est indépendant de z ,

$$\varphi = Cu^2 - u;$$

l'équation aux différentielles totales à intégrer s'écrit alors

$$-\frac{u \, dz - z \, du}{u^2} + dv + C \, dz = 0$$

et son intégration est immédiate, elle donne

$$-\frac{z}{xy} + \frac{y}{x} + Cz = C'.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer (en utilisant la théorie des intégrales d'une variable complexe) l'intégrale réelle

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[4]{x^3(1-x)^4}}.$$

(Bordeaux, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — En un point M d'une surface rapportée à trois axes rectangulaires $Oxyz$, on considère le plan tangent et la normale.

Le plan tangent coupe Oz en T . Le point M se projette en H sur Oz .

La plus courte distance de Oz et de la normale est AB (A sur Oz , B sur la normale). On construit BC parallèle à Oz et égal à AB et, sur la normale, on prend D tel que CD soit parallèle au plan Oxy .

Étudier les surfaces telles que

$$(1) \quad \overline{TH} = \varphi(\overline{CD}),$$

φ étant une fonction arbitrairement donnée.

1° Écrire l'équation aux dérivées partielles (1) en coordonnées rectangulaires puis en coordonnées semi polaires.

2° En trouver, dans les deux systèmes de coordonnées, une intégrale complète. Intersections par des plans parallèles à Oxy des surfaces représentées par cette intégrale complète.

3° Toujours dans les deux systèmes de coordonnées, former l'équation aux dérivées partielles du second ordre des surfaces (1).

4° Déterminer complètement les surfaces telles que $\overline{TH} = \overline{CD}$.

SOLUTION. — 1° On a très aisément

$$(2) \quad \overline{TH} = px + qy, \quad \overline{CD} = qx - py,$$

et l'équation (1) est, par suite,

$$(3) \quad px + qy = \varphi(qx - py).$$

Les segments (2) sont susceptibles de signes mais ceci n'influe pas sur la structure générale de l'équation (3) tant que la fonction φ n'est pas déterminée. En coordonnées semi-polaires, (3) prend la forme

$$(4) \quad r \frac{\partial z}{\partial r} = \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right).$$

2° Il est évidemment indiqué de commencer l'intégration sur (4). En posant

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \alpha, \quad \text{on a} \quad r \frac{\partial z}{\partial r} = \varphi(\alpha),$$

d'où

$$z = \alpha \theta + \varphi(\alpha) \log r + c.$$

Ceci est une intégrale complète. Elle représente des hélicoïdes dont l'intersection par des plans de cote z constante dans des spirales logarithmiques.

3° L'équation (3) constitue une *intégrale intermédiaire* pour l'équation de Monge-Ampère

$$(x^2 + y^2)(rt - s^2) + (px - qy)(t - r) - 2(py + qx)s - p^2 - q^2 = 0.$$

De même (4) pour

$$r \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial z}{\partial r} + r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right).$$

4° Ici il faut considérer la double équation

$$r \frac{\partial z}{\partial r} = \pm \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

dont l'intégrale générale est

$$z = f(\theta \pm \log r).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le problème de l'épreuve théorique conduit à la considération des hélicoïdes*

$$z = a\theta + b \log r + c,$$

où a, b, c sont trois constantes et r, θ, z des coordonnées semi-polaires.

On demande les lignes asymptotiques de ces hélicoïdes.

SOLUTION. — La surface

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z(r, \theta)$$

a ses lignes asymptotiques définies par l'équation différentielle

$$r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr^2 + 2 \left(r \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) dr d\theta + r \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial z}{\partial r} \right) d\theta^2 = 0.$$

Bien que ce ne soit pas indispensable pour le cas présent, c'est un excellent exercice que de former cette équation qui s'applique évidemment à une surface quelconque donnée en coordonnées semi-polaires. Pour les hélicoïdes indiqués elle se réduit à

$$br^2 d\theta^2 - 2ar dr d\theta - b dr^2 = 0.$$

Les variables sont immédiatement séparées et l'on a deux familles de spirales logarithmiques pour projection des asymptotiques sur le plan $z = 0$.

(Toulouse, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne l'équation aux dérivées partielles

$$x(cz - by)p + y(ax - cz)q = z(by - ax).$$

Déterminer :

1° L'intégrale générale;

2° L'intégrale qui passe par la droite

$$ax = by = cz;$$

3° Le plan tangent à cette dernière surface au point

$$x = \frac{k}{a}, \quad y = \frac{k}{b}, \quad z = \frac{k}{c}.$$

II. Trouver les trajectoires orthogonales des cercles

$$x = a + r \cos \theta, \quad y = b + r \sin \theta;$$

où a, b, r sont fonctions du paramètre u , en déterminant θ en fonction de u .

Application. — Trouver les trajectoires orthogonales des cercles normaux à l'axe Ox et à la parabole $y = x^2$ en un de leurs points d'intersection.

M étant ce point commun, on aura intérêt à employer comme paramètre u l'angle de la tangente en M à la parabole avec Ox .

ÉPREUVE PRATIQUE. — III. On donne l'équation

$$(x+1)y'' - 2y' - (x-1)y = 2xe^{-x}.$$

L'intégrer sachant que l'équation sans second membre admet une intégrale de la forme e^{rx} .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Le système associé donne les intégrales premières

$$ax + by + cz = \alpha, \quad xyz = \beta;$$

d'où l'intégrale générale

$$ax + by + cz = \varphi(xyz)$$

et l'intégrale particulière

$$(ax + by + cz)^3 = 27abcxyz.$$

C'est un cône, qui admet $ax = by = cz$ comme génératrice double.

II. La relation d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \sin \theta \, dx - \cos \theta \, dy &= 0, \\ da \sin \theta - db \cos \theta - r \, d\theta &= 0 \end{aligned}$$

donne, en posant $\tan \frac{\theta}{2} = v$,

$$a' \frac{2v}{1+v^2} - b' \frac{1-v^2}{1+v^2} - \frac{2r}{1+v^2} \frac{dv}{du} = 0,$$

c'est une équation de Riccati.

Dans le cas particulier et avec la notation indiquée,

$$a = \frac{x}{2}, \quad b = 0, \quad 2x = \tan u, \quad r = \frac{x}{2 \cos u} = \frac{\tan u}{4 \cos^2 u}$$

et l'équation devient

$$v - \tan u \frac{dv}{du} = 0.$$

III. L'équation sans second membre admet l'intégrale

$$y = e^{+x}.$$

La substitution $y = ze^{+x}$ donne

$$(x+1)z' + 2xz' = 2xe^{-2x};$$

d'où l'intégrale générale demandée

$$y = e^{-x}(x+1) + Ce^{-x}\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right).$$

(Besançon, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 - h)y = 0$$

ne change pas quand on pose

$$x = x_1 + k, \quad y = e^{kx} y_1 \quad (k \text{ const.}).$$

Si l'on connaît une solution $F(x)$, on peut d'après ce qui précède en écrire une autre.

Obtient-on l'intégrale générale en ajoutant ces solutions respectivement multipliées par des constantes ?

Quelle est l'intégrale générale ?

II. Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$z + xp - x^2 y q^2 - x^3 pq = 0.$$

Étudier la surface intégrale singulière.

ÉPREUVE PRATIQUE. — III. On donne la surface S ,

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3} u^2 v.$$

1° Déterminer le plan tangent.

2° Quelle relation existe entre le plan tangent au point M et le plan osculateur au même point M de la courbe $v = 0$?

3° Déterminer les lignes asymptotiques de S .

4° Construire les projections sur xOy des lignes asymptotiques passant par $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4}{3}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Par la substitution donnée, l'équation donnée ne change pas. Ainsi à la solution $y = F(x)$ correspond

$$y = e^{kx} F(x - k).$$

Ces deux intégrales ne sont pas indépendantes si

$$\begin{vmatrix} F(x) & e^{kx} F(x - k) \\ F'(x) & e^{kx} F'(x - k) + k e^{kx} F(x - k) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{F'(x - k)}{F(x - k)} - (x - k) = \frac{F'(x)}{F(x)} - x = C, \quad F(x) = e^{\frac{x^2}{2} + Cx}.$$

Des fonctions de cette forme satisfont à l'équation donnée

$$(C^2 + 1 - h = 0);$$

d'où l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2} + \sqrt{h-1}x} + C_2 e^{\frac{x^2}{2} - \sqrt{h-1}x}.$$

II. Le système associé donne la combinaison

$$\frac{dx}{x} + \frac{dq}{q} = 0, \quad qx = a,$$

d'où l'intégrale complète

$$z = \frac{ay + b(ax - 1)}{x}$$

et l'intégrale singulière

$$z = \frac{y}{x^2}.$$

III. 1° $2u^2(3u^2 + v)(X - x)$

$$- 4u(2u^2 + v)(Y - y) + 3(u^2 + v)(Z - z) = 0.$$

2° $6u^4(X - x) - 8u^3(Y - y) + 3u^2(X - x) = 0,$

identique au plan tangent pour $v = 0$.

3° $(5u^2v + v^2)du^2 - 2u^3dudv = 0;$

$$v = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{C - \sqrt{u}}.$$

4° Ce sont la génératrice et la ligne asymptotique passant par

$$u = 1, \quad v = \frac{3}{2}.$$

(Besançon, octobre 1925.)