

Solution de question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 177-178

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__177_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE QUESTION DE LICENCE.

Question C.7.

(*Mécanique rationnelle, épreuve théorique; énoncé publié en novembre 1925, p. 52.*)

SOLUTION

par TH. BOZON.

Nous désignons par A et C les coefficients de l'ellipsoïde central pour l'un ou l'autre des deux solides, par l et l_1 les cotes des centres de gravité suivant l'axe commun Oz . Les positions des solides dépendent des angles d'Euler

$$\theta, \psi, \varphi; \quad \theta, \psi, \varphi_1,$$

avec la condition de liaison

$$\frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

La méthode de Lagrange conduit immédiatement aux équations suivantes.
Ann. de Mathémat., 6^e série, t. I. (Mars 1926.)

vantes (où l'on a posé $\mathfrak{A} = A + M \frac{l^2 + l_1^2}{2}$):

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A} \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \theta'^2 = [Mg(l + l_1) \cos \theta + h][A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta] - \lambda^2 \\ \equiv F(\theta)$$

$$\mathfrak{A} \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \psi' = \lambda$$

$$\varphi' = \mu.$$

1° Lorsque $l + l_1 = 0$ la discussion en θ est très simple puisque $F(\theta)$ est un polynôme du second degré par rapport à $\cos \theta$. Lorsque $\cos^2 \theta$ varie de 0 à 1 cette fonction varie, toujours dans le même sens entre $h\mathfrak{A} - \lambda^2$ et $hC - \lambda^2$. Donc θ' ne s'annulera jamais, θ variant donc toujours dans le même sens (mouvement révolutif) lorsque $\frac{\lambda^2}{h}$ sera inférieur à A et à C .

Si, au contraire, $\frac{\lambda^2}{h}$ est compris entre $\mathfrak{A}$ et C [noter qu'il ne peut dépasser à la fois $\mathfrak{A}$ et C parce que $F(\theta)$ serait alors toujours négatif], θ' s'annulera et θ aura une variation périodique. On voit immédiatement que les oscillations sont symétriques par rapport à l'une des droites $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ suivant que C dépasse ou non $\mathfrak{A}$.

2° $l + l_1$ est positif et très grand. Pour avoir un mouvement dans lequel θ tend asymptotiquement vers π , il faut que π soit racine double de $F(\theta)$, c'est-à-dire que -1 soit racine simple de

$$g(u) \equiv [Mg(l + l_1)u + h][\mathfrak{A} + (C - \mathfrak{A})u^2] - \lambda^2 = 0$$

sans qu'il y ait d'autre racine entre u_0 (valeur initiale de $\cos \theta = u$) et -1 .

Ceci donne

$$(1) \quad \lambda^2 = [-Mg(l + l_1) + h]C$$

et la dérivée $\varphi'(-1)$, calculée dans cette hypothèse, peut s'écrire

$$g'(-1) = 2(\mathfrak{A} - C) \frac{\lambda^2}{C} + Mg(l + l_1)C,$$

évidemment positif parce que nous sommes dans le cas $\mathfrak{A} > C$. $\varphi(u)$ ayant les signes + et - pour u égal à $-\infty$ et $+\infty$, -1 est la seconde racine de ce polynôme. La troisième racine ne peut être qu'au delà de u_0 de sorte que (1) est la seule condition à satisfaire. Introduisons les valeurs initiales θ'_0 et ψ'_0 ; il vient d'abord, pour déterminer h , la condition

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A} + (C - \mathfrak{A})u_0^2] \theta_0'^2 = [Mg(l + l_1)u_0 + h][\mathfrak{A} + (C - \mathfrak{A})u_0^2] \\ - C[h - Mg(l + l_1)];$$

θ' étant assez grand pour que la valeur de h ainsi obtenue dépasse $Mg(l + l_1)$, l'équation (1) déterminera λ , c'est-à-dire ψ'_0 .

Autre solution par J. de Caumont.