

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 145-153

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 44. — I. On considère la droite D qui a pour équation

$$u^3x - 3uy - 1 = 0,$$

u , désigne un paramètre variable.

Déterminer et construire l'enveloppe de cette droite.

Soit A un point de cette enveloppe, d'ordonnée y_0 . Soit Δ celle des droites D qui est tangente en A à l'enveloppe. On considère l'aire limitée par la courbe enveloppe, la droite Δ et l'axe Oy. Déterminer le centre de gravité de cette aire.

C. 45. — II. Intégrer l'équation différentielle

$$x^2y'^2 - 4xyy' + y^2 - x^2 = 0.$$

Par un point A au plan, il passe, en général, deux courbes intégrales. Où doit se trouver le point A pour que ces deux courbes fassent un angle donné, V (c'est-à-dire pour que les deux tangentes en A fassent l'angle V) ?

III. On donne la fonction

$$y = e^x \sin x$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe représentative.

Calculer le rayon de courbure de la courbe à l'origine des coordonnées.

Développer la fonction en série entière.

IV. On considère les équations

$$x = 3u + v,$$

$$ly = u - v,$$

$$z = uv,$$

u et v désignent deux paramètres; x, y, z désignent les coordonnées d'un point.

Montrer que ces équations représentent une surface réglée.

On coupe la surface par la droite $x = y = z$. Former l'équation du plan tangent à la surface en chacun des deux points d'intersection.

Déterminer les plans tangents à la surface qui passent par la droite $x = y = z$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° En utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1+x^3}$, calculer à $\frac{1}{10^5}$ près la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^3}.$$

2° Calculer la valeur de la même intégrale en utilisant l'expression, à l'aide de fonctions usuelles, d'une primitive de $\frac{1}{1+x^3}$ et une table de logarithmes à cinq décimales. Évaluer une limite supérieure de l'erreur commise.

(Caen, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 46. — I. Soient deux axes rectangulaires Ox , Oy . On considère dans le plan xOy une courbe C passant par l'origine O , telle que le cosinus de l'angle avec Ox de la normale au point M d'abscisse x soit égal à

$$\frac{1-x}{1+x}.$$

Calculer en fonction de x la longueur de l'arc S compris entre O et M et donner en fonction de x l'expression du rayon de courbure en M . Quelle est l'équation de la courbe C ?

C. 47. — II. t représentant le temps, les coordonnées rectangulaires x , y , z d'un mobile sont données par les formules

$$x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{3} - t, \quad z = \frac{t^3}{3} + t.$$

Montrer que le mouvement ainsi défini est celui que prend un mobile de masse 1 s'il est placé dans le champ de forces défini par

$$X = z, \quad Y = z - y, \quad Z = z - y,$$

et si on l'abandonne, à l'origine des coordonnées, avec une vitesse convenable. Quelle est l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xy ?

III. Déterminer la solution y de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$

qui s'annule ainsi que sa dérivée première pour $x = 0$. Quelle est la

partie principale de l'infiniment petit y , x étant l'infiniment petit principal ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne l'équation

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Vérifier qu'elle a une racine double. Résoudre cette équation.
Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}.$$

INDICATIONS. — On met aisément le polynôme sous la forme $(x+1)^2(x^2+1)$ et le calcul des éléments simples $\frac{A}{(x+1)^2}, \frac{B}{x+1}, \frac{C}{x^2+1}$ ainsi que l'intégration ne présentent aucune difficulté.

(Caen, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° En désignant par α une constante, trouver l'intervalle de convergence de la série entière

$$(1) \quad y = x(1+\alpha) + \frac{x^2}{2}(1+\alpha^2) + \dots + \frac{x^n}{n}(1+\alpha^n) + \dots$$

et sa somme dans cet intervalle.

2° Le développement en série de la fonction

$$(2) \quad y = L\left(\frac{1}{1-3x+2x^2}\right)$$

peut-il coïncider avec (1) ?

Pour quelle valeur de α en est-il ainsi ?

3° Construire, par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy , la courbe représentative de la fonction (2).

4° Calculer

$$\int_0^x L\left(\frac{1}{1-3y+2y^2}\right) dy,$$

x étant un nombre positif moindre que $\frac{1}{2}$. Limite du résultat, quand x tend vers $\frac{1}{2}$.

II. Soit C la courbe définie, par rapport au trièdre trirectangle $Oxyz$, par les équations

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

Trouver le cône engendré par les droites joignant l'origine à un point variable M de cette courbe; l'angle de la tangente en M , dans le sens des t croissants, d'une part avec la demi-droite OM , d'autre part avec la demi-droite Oz . Indiquer l'aspect de la courbe C . Calculer son rayon de courbure.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° Le rayon de convergence est le plus petit des nombres 1, 1 : $|\alpha|$.

2°

$$\alpha = 2.$$

$$3^{\circ} \quad I = \frac{1-2x}{2} \log(1-2x) + (1-x) \log(1-x) + 2x;$$

$$\lim = 1 - \frac{1}{2} \log 2.$$

II. 1°

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

2°

$$\cos V_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos V_2 = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

3° La courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique (hélice cylindro-conique).

4°

$$R = \frac{3}{\sqrt{2}} e^t.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver l'intégrale de l'équation différentielle

$$y'' + y = x^2(\cos x + \sin x)$$

telle que, pour $x = 0$, on ait $y = 0$ et $y' = 1$.

SOLUTION :

$$y = -\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 + x}{4}\right) \cos x + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 - x + 3}{4}\right) \sin x.$$

(Poitiers, novembre 1925.)

ÉPREUVE ÉCRITE (Analyse). — 1° Trouver, pour l'équation différentielle

$$(3x^2 - a^2)y + (3x^2 + a^2)xy' = 2x^3,$$

la courbe intégrale (Γ) qui passe au point A de coordonnées $x = a$, $y = a$.

2° Montrer que l'équation de la courbe (Γ) peut s'écrire

$$\frac{y-a}{y+a} = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3;$$

étudier la forme de la courbe; déterminer ses points et tangentes remarquables. Pour le dessin, on prendra $a = 2^{\text{cm}}$.

3° Par le point A, on peut mener à (Γ) une seule tangente AB dont le point de contact B soit distinct de A. Calculer l'aire comprise entre le segment de droite BA et l'arc BA de la courbe (Γ) .

4° Calculer avec trois décimales exactes, en prenant $a = 1$, l'abscisse du point P de l'arc OA sur la courbe (Γ) , où la tangente a pour pente 1.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° L'équation de la courbe (Γ) s'obtient immédiatement sous la forme

$$y = \frac{x^3 + 3a^2x}{3x^2 + a^2}.$$

2° La droite $y = \frac{x}{3}$ est asymptote, la droite $y = 3x$ tangente en O, l'origine centre de symétrie, le point A point d'inflexion à tangente parallèle à O x.

3° B a pour coordonnées $-\frac{a}{3}$ et $-\frac{7a}{9}$; l'aire vaut $\frac{4a^2}{9} \text{Log} 3$.

4° L'abscisse de P est 0,393.

ÉPREUVE THÉORIQUE (Mécanique). — Une barre homogène pesante, de longueur $2a$ et de poids P, s'appuie sur un sol horizontal par une de ses extrémités A; elle s'appuie en outre sans frottement sur un cylindre horizontal de section infiniment petite O, dont les génératrices sont normales à la barre et fixé à une hauteur h au-dessus du sol :

I. En désignant par f le coefficient de frottement de la barre sur le sol, former la condition à laquelle doit satisfaire l'angle α de la barre avec le sol pour que l'équilibre soit possible et calculer en fonction de α les valeurs correspondantes des réactions.

II. En supposant $h < a$, quelle serait la condition d'équilibre limite en supposant f très grand, c'est-à-dire théoriquement infini? Donner les expressions plus simples auxquelles se réduiraient alors les réactions et les représenter de façon vraisemblable, en même temps que le poids P, sur une figure spéciale.

SOLUTION I. — Les équations d'équilibre donnent, R étant la réaction en O, N et T les composantes normale et tangentielle de la réaction en A,

$$P = R \cos \alpha + N, \quad T = R \sin \alpha, \quad Pa \cos \alpha = R \frac{h}{\sin \alpha};$$

d'où

$$R = P \frac{a}{h} \sin \alpha \cos \alpha, \quad T = P \frac{a}{h} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad N = P \left(1 - \frac{a}{h} \sin \alpha \cos^2 \alpha \right).$$

La condition $T \leq fN$ donne

$$\frac{a}{h} \sin^2 \alpha \cos \alpha \leq \left(1 - \frac{a}{h} \sin \alpha \cos^2 \alpha\right) f,$$

dont une solution évidente est $\cos \alpha = 0$.

II. Pour $f = \infty$, la condition d'équilibre limite est

$$\frac{h}{a} - \sin \alpha \cos^2 \alpha = 0$$

et alors

$$R = \frac{P}{\cos \alpha}, \quad T = P \tan \alpha, \quad N = 0.$$

(Toulouse, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + 2hy' + 4y = 6 \sin x + 8x^2.$$

Diverses formes de l'intégrale générale suivant la valeur de la constante positive h .

2° Cas particulier où

$$h = 1, \quad h = 2, \quad h = 3.$$

3° Trouver dans le cas particulier où $h = 0$ une solution $y = f(x)$ telle que y et y' soient nuls pour $x = 0$ et déterminer l'ordre et la partie principale de $f(x)$ pour x infiniment petit.

II. Montrer qu'il existe une fonction $z = f(x, y)$ telle que l'on ait

$$dz = \frac{(y^2 - y + x) dx + (y - x^2 - x) dy}{(y - x)^2}$$

et déterminer cette fonction.

III. Les axes étant rectangulaires et a désignant une constante positive, on considère le solide limité par les plans $x = 0, y = 0, z = 0$, les surfaces

$$(S) \quad a^3 z = xy^3,$$

$$(C) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

et situé dans le trièdre où x, y, z sont positifs.

Calculer le volume de ce solide et l'aire de la face située sur C .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° et 2° Pour $h > 2$, on a

$$y = e^{-hx} (A e^{x\sqrt{h^2-4}} + B e^{-x\sqrt{h^2-4}}) + \frac{6(3 \sin x - 2h \cos x)}{9 + 4h^2} + 2x^2 - 2hx + h^2 - 1,$$

et l'on remplacera la première parenthèse par

$$A \sin(\sqrt{4-h^2}x + \varphi) \quad \text{ou} \quad Ax + B,$$

suivant que h est plus petit ou égal à 2.

3° Pour $h = 0$, on a

$$y = \cos 2x - \sin 2x + 2 \sin x + 2x^2 - 1 \equiv x^2(1 - \varepsilon).$$

$$\text{II.} \quad z = \frac{xy}{y-x} + L |y-x| + C.$$

$$\text{IV.} \quad 1^\circ \text{ Aire égale à } \frac{\alpha^2}{4}; \quad 2^\circ \text{ volume égal à } \frac{\alpha^3}{24}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. C. 48. — *L'axe Oy étant vertical et dirigé vers le bas, un point M de masse m et de poids mg est mobile sans frottement sur la courbe représentée par : $x = au^3$, $y = au^2$. A l'instant initial, M est placé au point le plus haut de la courbe et sa vitesse v_0 est donnée par $v_0^2 = 2\lambda ga$, λ et a sont des constantes positives.*

1° Former l'équation différentielle du mouvement;

2° Intégrer cette équation dans le cas où $\lambda = 0$;

3° Intégrer dans le cas de λ quelconque;

4° Loi du mouvement dans le cas où $\lambda = \frac{4}{9}$. Déterminer dans ce cas les composantes de la force qui, agissant sur le point M, supposé libre et non pesant, produirait ce mouvement.

II. Discuter l'équation

$$x - (1+x)L(1+x)^2 = 0$$

et calculer ses racines à une unité près.

(Lyon, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit l'équation différentielle

$$x^2(x+1)y' = x(x+2)y - 3(x+1)^2.$$

1° L'intégrer. Constaté que l'une des courbes intégrales Γ est une conique (C), la construire.

2° C mise à part, les Γ ont trois asymptotes, deux sont fixes, la troisième passe par un point fixe.

3° Construire la courbe intégrale Γ_0 qui a une asymptote horizontale. Comment, C et Γ_0 étant supposées tracées, peut-on tracer la Γ qui passe par un point donné.

4° Les tangentes aux Γ en leurs points d'intersection avec une même parallèle Δ à Oy passent par un point fixe. Lieu de ce point quand Δ varie.

5° Lieu des points d'inflexion des Γ .

II. Définir le plan osculateur à une courbe. Former son équation en supposant les coordonnées d'un point de la courbe données en fonction d'un paramètre t .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'équation proposée linéaire du premier ordre avec second membre s'intègre par le procédé classique

$$y' = \frac{Cx^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x(x+1)}.$$

Ce sera une conique si $(x+1)$ est en facteur au numérateur, $C=1$, donc

$$(G) \quad y' = \frac{(x+1)^2}{x}.$$

$y=Cx+3-C$ Les deux asymptotes fixes des Γ sont $x=0$ et $x=-1$, la troisième cherchée par les procédés classiques est $y-Cx=3$. Γ_0 est la Γ qui est donnée par $C=0$. La construction demandée d'une Γ résulte de la relation

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \text{const.}$$

qui existe entre les ordonnées de Γ , C , et Γ_0 pour la même valeur de x . Les tangentes aux diverses Γ aux points d'intersection avec Δ dépendent linéairement de C , donc passent par un point fixe dont on trouve facilement les coordonnées en fonction de x , puis le lieu géométrique.

Les points d'inflexion ont leurs x déterminés par l'équation $y''=0$; leur lieu s'obtient par l'élimination de C entre deux équations de premier degré.

II. Question de cours.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Établir les formules de récurrence pour les intégrales définies

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx, \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \quad (n \text{ entier positif}).$$

Les calculer à 0,001 près pour $n=1, 2, 3, 4$.

II. Soit la courbe gauche Γ

$$y = \frac{1}{2}x^2 \cos x, \quad z = \frac{1}{2}x^2 \sin x.$$

Déterminer : 1° le rayon de courbure en un point quelconque; 2° la tangente, la normale principale et la binormale à l'origine.

III. La densité linéaire de Γ étant constante (égale à 1), calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de Γ qui correspond aux valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on les exprimera en fonction des A et B de la première partie et on les calculera à 0,001 près).

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — C'est une application numérique des formules du cours.

(Bordeaux, novembre 1925.)