NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Sur une classe de fonctions entières

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3 (1924), p. 361-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__361_0>

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR G. VALIRON.

Je rappellerai d'abord les propriétés, d'ailleurs faciles à retrouver, d'une des fonctions introduites par Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques. Si l'on pose

$$S(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n \qquad (|q|<1),$$

on a

$$S(z)=S\left(\frac{1}{z}\right)$$

et

$$S(z)=zqS(zq^2), \tag{1}$$

ce qui montre que la fonction est de la forme suivante :

$$S(z)=A\prod_0^{\infty}(1+zq^{2n+1})\left(1+\frac{q^{2n+1}}{z}\right),$$

A étant une constante (1). Dans le domaine

$$|q|<|z|<|q|^{-3},$$

$S(z)$ est donc holomorphe et ne s'annule qu'au point $z=-\frac{1}{q}$, c'est cette propriété qui sera utilisée.

Les fonctions entières que nous allons considérer sont de la forme

$$f(z)=\sum_0^{\infty} g(p)q^{p^2}z^p \qquad (|q|<1), \tag{2}$$

(1) Voir le *Traité d'Analyse* de Jordan (3e édition), t. II, p. 483.

$g(x)$ étant une fonction réelle ou complexe de l'entier x vérifiant la condition

$$\lim_{x=\infty} \frac{g(x)\,g(x+2)}{[g(x+1)]^2} = 1. \tag{3}$$

On se propose d'étudier les valeurs prises par $f(z)$ dans le voisinage du point à l'infini et à cet effet de ramener le cas où $g(x)$ est quelconque à celui où cette fonction est égale à 1 ; plus précisément de comparer les valeurs de $f(z)$ et de $S(z)$. L'idée directrice est celle qui a été introduite dans ces questions par M. Borel : pour les grandes valeurs de z la valeur de la fonction est donnée approximativement par un groupe de termes entourant le terme maximum. Nous poserons donc

$$z = q^{-2n} \frac{g(n-1)}{g(n)} Z \tag{4}$$

et nous supposerons que le point Z décrit la couronne C

$$q' < |Z| < q'^{-1} |q|^{-2} \qquad (|q| < q' < 1).$$

Z étant dans C et n prenant les valeurs entières successives supérieures à un certain nombre n_0, le point z défini par (4) balaye l'extérieur d'un certain cercle Γ, $|z| > r_0$. Les valeurs prises par $f(z)$ à l'extérieur de ce cercle Γ sont les valeurs prises dans C par la suite des fonctions holomorphes dans C

$$f_n(Z) = f\left[q^{-2n} \frac{g(n-1)}{g(n)} Z\right].$$

Nous ne considérerons pas ces fonctions directement, mais les fonctions

$$g_n(Z) = f_n(Z) \frac{1}{g(n) q^{n^2} z^n},$$

z étant toujours défini par (4). On a

$$g_n(Z) = \sum_{m=-n}^{+\infty} g(n, m) q^{m^2} z^m$$

avec

$$g(n, m) = \frac{g(n+m)[g(n+1)]^m}{[g(n)]^{m+1}}.$$

De la condition (3) on déduit aisément que, ε étant arbitrairement petit, le module de $g(n, m)$ est égal à $(1+\theta\varepsilon)^{m^2}$ dès que n est assez grand ($|\theta| < 1$). Par suite $g_n(Z)$ tend uniformément vers $S(Z)$ lorsque n croît indéfiniment et que Z est intérieur à C. *On obtient donc l'égalité*

$$f(z) = [S(Z) + \varepsilon(Z)]\, g(n) q^{n^2} z^n, \tag{5}$$

$\varepsilon(Z)$ *tendant uniformément vers zéro dans* C, c'est-à-dire une valeur asymptotique de $f(z)$, sauf dans le voisinage des points correspondant à $-\frac{1}{q}$. Mais on a en outre une valeur approchée des zéros de $f(z)$ et d'une façon générale des zéros de $f(z) - P(z)$, $P(z)$ étant un polynome. Car, d'après la condition (3), $g(n)$ est égal à $e^{\varepsilon n^2}$ (ε étant arbitrairement petit) le second facteur du second membre de (5) croît donc indéfiniment plus rapidement que toute puissance de z et les zéros de $f(z) - P(z)$ sont donnés par l'équation

$$S(Z) = \varepsilon_1(Z)$$

dont le second membre reste aussi petit que l'on veut à l'intérieur de C pourvu que n soit assez grand. D'après un théorème connu et généralement attribué à Rouché (1), cette équation a une seule racine dans C

(1) Voir le *Cours d'Analyse* de M. Goursat (3e édition), t. II, p. 121.

égale à $-q^{-1}(1+\eta_n)$ et par suite les zéros de $f(z)-P(z)$ dont le module est supérieur à un certain nombre dépendant de $P(z)$ sont les points

$$-q^{-2n-1}\frac{g(n-1)}{g(n)}(1+\eta_n) \qquad (\lim \eta_n = 0),$$

dont les modules vont en croissant. Ces zéros sont distribués sur une courbe qui se comporte dans les couronnes R, KR (K fini) comme une spirale logarithmique. [Pour une même fonction $f(z)$ les zéros des fonctions $f(z)-P(z)$ sont d'ailleurs liés par une relation beaucoup plus serrée que celle trouvée ici.]

Lorsque q et $g(x)$ sont reels et $P(z)$ à coefficients réels les zéros obtenus sont réels puisque leurs modules sont distincts, *il n'y a qu'un nombre fini de zéros complexes*. Il en est de même pour les zéros de $f(zq)-P(z)$ lorsque $g(x)$ et $P(z)$ sont réels et q imaginaire pure.

Certaines des fonctions (2) vérifient des équations fonctionnelles linéaires simples. $f_1(z)$ correspondant à $g(x)=1$ est solution de l'équation

$$zq\,\varphi(zq^2)=\varphi(z)-1 \tag{6}$$

dont la résolution est ramenée (en posant $\varphi = f_1+\psi$) à celle de l'équation (1) de $S(z)$, la solution générale est donc

$$\varphi = f_1(z)+S(z)\,G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction invariante par la substitution (z, zq^2). La fonction $f_2(z)$ correspondant à

$$g(0)=1, \qquad g(n)=\frac{1}{n!}$$

vérifie l'équation différentielle fonctionnelle

$$\varphi'(z)=q\,\varphi(zq^2). \tag{7}$$

Les équations obtenues en ajoutant un polynome au second membre de (6) et (7) admettent respectivement pour solutions $\lambda f_1(z)+P(z)$ et $f_2(z)+P(z)$. En prenant $g(0)=1$ et $g(n)=n!$ on obtient une fonction $f_3(z)$ solution de l'équation encore très simple, mais d'un type différent du précédent

$$z^2\varphi'(z)+z\varphi(z)=q\varphi\left(\frac{z}{q^2}\right)-q.$$

On formera de même les équations vérifiées par les fonctions obtenues en prenant $g(n)$ égal à $(n!)^p$, p étant entier. Parmi les autres fonctions simples de la forme (1) figureront naturellement les dérivées et primitives successives des fonctions précédentes, mais aussi les primitives généralisées (multipliées par une puissance convenable de z) de ces fonctions, par exemple les fonctions correspondant à $g(x)=\frac{1}{\Gamma(x+a)}$, Γ étant la fonction eulérienne de seconde espèce et a ayant sa partie réelle positive.

Les méthodes de Laguerre (1) permettent de reconnaître que, pour ces fonctions particulières, *les zéros sont tous réels lorsque q est réel.*