

G. BOULIGAND

Un problème de percussions

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 293-300

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__293_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN PROBLÈME DE PERCUSSIONS ;

PAR G. BOULIGAND.

1. Étudions d'abord le problème suivant :

On considère un fil flexible, inextensible et sans masse, suspendu par une extrémité O, et le long duquel on dispose invariablement des masses ponctuelles en des points $M_1, M_2, \dots, M_n$. Le système est en équilibre dans sa position verticale, et l'on suppose que

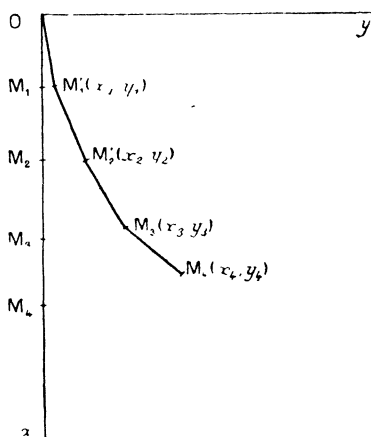
$$\overline{OM_1} = \overline{M_1M_2} = \dots = \overline{M_{n-1}M_n}.$$

Soient $m_1, m_2, \dots, m_n$ les masses placées aux points en question. On fait agir simultanément sur elles des percussions horizontales et parallèles, d'intensités respectives $P_1, P_2, \dots, P_n$. En désignant par l la longueur totale, déterminer l'état des vitesses du

système, à l'instant immédiatement postérieur à la production de ces impulsions.

Nous avons fait la figure dans le cas de $n = 4$ et nous avons pris comme axe Ox la position d'équilibre du système. Soit $OM'_1 M'_2, \dots, M'_n$ une position vir-

Fig. 1.



tuelle quelconque : nous la déterminerons par ses angles

$$\widehat{Ox, OM'_1} = \theta_1, \quad \dots, \quad \widehat{Ox, OM'_n} = \theta_n.$$

Les coordonnées des différentes masses dans cette position seront données par des équations de la forme

$$x_i = \frac{l}{n} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_i),$$

$$y_i = \frac{l}{n} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_i).$$

De là, on passe aux vitesses

$$x'_i = -\frac{l}{n} (\theta'_1 \sin \theta_1 + \theta'_2 \sin \theta_2 + \dots + \theta'_i \sin \theta_i),$$

$$y'_i = \frac{l}{n} (\theta'_1 \cos \theta_1 + \theta'_2 \cos \theta_2 + \dots + \theta'_i \cos \theta_i).$$

Dans la position utile Ox , tous les θ_i sont nuls. Donc $x_i'^2 + y_i'^2$ se réduit à

$$\frac{l^2}{n^2} (\theta'_1 + \theta'_2 + \dots + \theta'_i)^2,$$

d'où, pour cette position, la valeur de la force vive

$$(I) \quad 2T = \frac{l^2}{n^2} [m_1 \theta_1'^2 + m_2 (\theta_1' + \theta_2')^2 + \dots + m_n (\theta_1' + \theta_2' + \dots + \theta_n')^2].$$

La réponse est alors immédiatement fournie par les équations de Lagrange relatives aux percussions. L'une de ces dernières, appliquée à M_i , a pour composantes $(0, P_i)$. Son travail virtuel est donc $P_i \delta y_i$. La somme des travaux virtuels sera $\sum P_i \delta y_i$ ou encore

$$(2) \frac{l}{n} [P_1 \delta \theta_1 + P_2 (\delta \theta_1 + \delta \theta_2) + \dots + P_n (\delta \theta_1 + \delta \theta_2 + \dots + \delta \theta_n)].$$

Il faut écrire que l'on a, pour les valeurs $1, 2, \dots, n$ de l'indice i ,

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'_i} \right) = P_i + P_{i+1} + \dots + P_n,$$

ou simplement, puisque les vitesses initiales sont nulles,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'_i} = P_i + P_{i+1} + \dots + P_n,$$

d'où les équations

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} m_1 \theta'_1 + m_2 (\theta'_1 + \theta'_2) + \dots + m_n (\theta'_1 + \theta'_2 + \dots + \theta'_n) = \frac{n}{l} (P_1 + P_2 + \dots + P_n), \\ m_2 (\theta'_1 + \theta'_2) + \dots + m_n (\theta'_1 + \theta'_2 + \dots + \theta'_n) = \frac{n}{l} (P_2 + \dots + P_n), \\ \dots\dots\dots, \\ m_n (\theta'_1 + \theta'_2 + \dots + \theta'_n) = \frac{n}{l} P_n, \end{array} \right.$$

expression qu'on peut déduire de (1), en faisant croître n indéfiniment. On pourrait d'ailleurs l'obtenir aussi par un calcul direct, en remarquant que dans une position virtuelle, un point courant de l'arc étudié a pour coordonnées

$$x = \int_0^s \cos \theta \, ds, \quad y = \int_0^s \sin \theta \, ds.$$

On en déduit $\frac{\partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial y}{\partial t}$: ce sont des fonctionnelles linéaires et homogènes de $\frac{\partial \theta}{\partial t}$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = - \int_0^s \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \, ds, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^s \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \, ds.$$

Dans la position utile, $\frac{\partial x}{\partial t}$ est nulle quel que soit s , et l'on a

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x) = \int_0^x \frac{\partial \theta}{\partial t}(x) \, ds.$$

On a d'ailleurs

$$2T = \int_0^l \rho(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx,$$

ce qui donne la formule (4). L'expression obtenue est une fonctionnelle homogène et du second degré de $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, pour l'intervalle $0 \leq x \leq l$.

Calculons maintenant le travail virtuel correspondant à une déformation infinitésimale du fil. Pour la définir, il suffit de donner la variation $\delta \theta$ en fonction de x . Sur l'élément $(x, x + dx)$ agit une percussion de composantes 0 et $\varpi(x) dx$. La somme des travaux virtuels sera

$$\int_0^l \varpi(x) \delta y \, dx,$$

où l'on doit prendre

$$\delta y = \int_0^x \delta \theta \, ds,$$

d'où l'expression du travail percutant

$$(5) \quad \delta \mathfrak{E} = \int_0^l \left[dx \, \mathfrak{w}(x) \int_0^x \delta \theta \, ds \right],$$

qui est bien, dans les conditions étudiées, la limite de (2).

Cela posé, l'intervention d'une infinité de degrés de liberté ne fait nullement obstacle à l'application de la méthode de Lagrange au problème actuel. C'est ce qu'on peut montrer en reprenant l'équation fondamentale de la dynamique des percussions

$$(6) \quad \Sigma (m \Delta x' - P_x) \delta x + \Sigma (m \Delta y' - P_y) \delta y = 0$$

applicable à tous les systèmes satisfaisant à la condition des travaux virtuels. Nous rappellerons seulement qu'un fil flexible satisfait bien à cette condition. L'équation (6) doit être vérifiée pour tous les δx , δy compatibles avec les liaisons. Les liaisons consistent actuellement dans la condition de conservation des longueurs sur le fil. Pour l'exprimer, il est indiqué d'utiliser les valeurs (x, y) des coordonnées d'un point du fil exprimées pour chaque valeur s de l'abscisse curviligne à l'aide la fonction $\theta(s)$, car cette dernière, ainsi que sa variation $\delta \theta$, sont arbitraires. D'ailleurs, pour la position utile, nous avons $\delta x = 0$. L'équation (6) devient alors, en y remplaçant $\Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$ par sa valeur $\frac{\partial \theta}{\partial t}$,

$$\int_0^l \left\{ \left[\rho(x) dx \int_0^x \frac{\partial \theta}{\partial t}(s) ds - \mathfrak{w}(x) dx \right] \int_0^x \delta \theta ds \right\} = 0,$$

où toute la quantité entre crochets doit être intégrée

par rapport à x . Posons

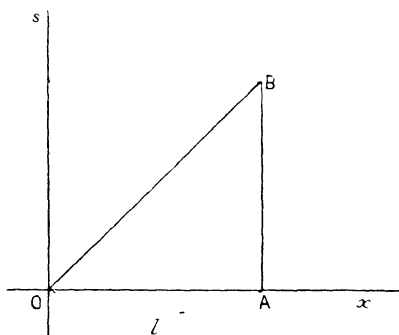
$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\partial \theta}{\partial t}(s) ds$$

et cherchons d'abord $\varphi(x)$, c'est-à-dire la primitive de $\frac{\partial \theta}{\partial t}(x)$. Il faut écrire que l'on a

$$\int_0^l \left\{ [\rho(x) \varphi(x) - \varpi(x)] \int_0^x \delta \theta ds \right\} dx = 0,$$

quelle que soit la fonction $\delta \theta$ dans l'intervalle $(0, l)$. Or, d'après la formule de Lejeune-Dirichlet relative à

Fig. 2



une integration dans le triangle OAB du plan xOs , la condition précédente peut s'écrire

$$\int_0^l \delta \theta ds \int_s^l [\rho(x) \varphi(x) - \varpi(x)] dx = 0,$$

elle exige que l'on ait

$$(7) \quad \int_s^l [\rho(x) \varphi(x) - \varpi(x)] dx = 0$$

quel que soit s , ou enfin que

$$\varphi(x) = \frac{\varpi(x)}{\rho(x)}.$$

On a donc finalement pour définir l'état des vitesses après la percussion

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\varpi}{\rho} \right).$$

Il est clair que la formule (7) et la formule (7 bis) pourraient s'obtenir à partir des relations (3') et (3 bis) par passage à la limite.

Cet exemple se rattache à une théorie générale : extension des méthodes de la dynamique analytique aux systèmes comportant une infinité de degrés de liberté. Dans le cas où ces degrés sont en nombre fini, un problème de percussions conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires, en nombre égal à celui des paramètres indépendants. Dans le cas d'une infinité de degrés de liberté, on pourra obtenir des équations intégrales linéaires (1) : ici, ces équations sont particulièrement simples et susceptibles d'une résolution immédiate.