

BERTRAND GAMBIE

Problème de Poncelet et problème analogue (suite et fin)

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 281-293

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3_281_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'17d]

PROBLÈME DE PONCELET ET PROBLÈME ANALOGUE*(suite et fin);*

PAR BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

8. Il est facile d'interpréter géométriquement les résultats exposés au paragraphe précédent ; cela nous permettra même de résoudre un problème nouveau analogue à celui de Poncelet et en rapport étroit avec lui.

La substitution $(a_1, b_1, c_1; a_p, b_p, c_p)$ fait correspondre à un point du plan (a_1, b_1, c_1) , rationnellement, un seul point (a_p, b_p, c_p) ; au point (a_p, b_p, c_p) correspondent inversement un groupe fini de points (a_1, b_1, c_1) . Si le point (a_1, b_1, c_1) est pris au hasard dans le plan, l'itération de cette transformation, qui n'est ni birationnelle ni involutive, donne successivement les points

$$(52) \quad (a_1, b_1, c_1), \quad (a_p, b_p, c_p), \quad (a_{p^2}, b_{p^2}, c_{p^2}), \quad \dots$$

qui correspondent aux coniques

$$(43) \quad C_1, \quad C_p, \quad C_{p^2}, \quad \dots$$

définies au paragraphe 2 et formant une suite indéfinie. Si C_0 et C_1 admettent des polygones P_n , autrement dit si (a_1, b_1, c_1) appartient à la courbe d'équation

$$f_n(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

les coniques (43) forment une suite périodique se

reproduisant soit de n en n , soit de $\frac{n}{\delta}$ en $\frac{n}{\delta}$ où δ est un diviseur de n . On est ramené au problème bien connu d'étudier les restes, suivant le module n , de la suite

$$1 \quad p \quad p^2 \quad p^3 \quad \dots$$

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons envisagé la question que pour $p = 2$; pour ne pas allonger, bornons-nous à ce cas $p = 2$. C'est parce que nous devons remplacer a_1, b_1, c_1 par

$$\frac{1}{(B_1 + C_1 - A_1)^2}, \quad \frac{1}{(C_1 + A_1 - B_1)^2}, \quad \frac{1}{(A_1 + B_1 - C_1)^3},$$

que nous avons écrit les formules (33).

Si nous partons de la courbe S_{2n+1} d'équation

$$(36) \quad f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

les quatre points (A_1, B_1, C_1) , (A'_1, B'_1, C'_1) , (A''_1, B''_1, C''_1) , (A'''_1, B'''_1, C'''_1) correspondant au même point (a_1, b_1, c_1) décrivent *quatre* courbes distinctes dont la première est S_{2n+1} , les autres étant S'_{2n+1} , S''_{2n+1} , S'''_{2n+1} . Il en résulte cette fois qu'au lieu d'étudier une *transformation plane qui n'est pas birationnelle*, nous avons une *transformation birationnelle de courbe à courbe* entre S_{2n+1} et $S^{(i)}_{2n+1}$ où i est l'un des entiers 0, 1, 2, 4. Bornons-nous à la transformation birationnelle ainsi obtenue sur S_{2n+1} : les quantités $\left(\frac{B_1}{A_1}, \frac{C_1}{A_1}\right)$ s'expriment *rationnellement* sur S_{2n+1} au moyen de $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_1}\right)$, il est nécessaire puisque

$$2A_1 = \frac{1}{\sqrt{b_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \quad 2B_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}}, \quad 2C_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{b_1}}$$

que les expressions

$$\sqrt{b_1 c_1}, \quad \sqrt{c_1 a_1}, \quad \sqrt{a_1 b_1}$$

s'expriment rationnellement, sur S_{2n+1} , au moyen de (a_1, b_1, c_1) .

La vérification est aisée pour le triangle, car

$$\begin{aligned} {}_3(a_1, b_1, c_1) &\equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1 \\ &\equiv (-a + b + c)^2 - 4b_1c_1 \\ &\equiv (a_1 - b_1 + c_1)^2 - 4c_1a_1 \\ &\equiv (a_1 + b_1 - c_1)^2 - 4a_1b_1. \end{aligned}$$

Nous allons même voir le moyen géométrique simple de définir cette correspondance birationnelle sur S_{2n+1} : le point (A_1, B_1, C_1) coïncide avec le point (a_n, b_n, c_n) déduit du point (a_1, b_1, c_1) .

En effet, la droite $A_nA'_n$ relative au point A_0 de départ sur C_0 a pour équation [voir plus haut formules (16) et suivantes]

$$\alpha_n x \cos \varphi_0 + \beta_n y \sin \varphi_0 - \gamma_n = 0.$$

Elle est donc la [polaire de $A_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ par rapport à la conique

$$(\Gamma_n) \quad \alpha_n x^2 + \beta_n y^2 - \gamma_n = 0.$$

Comme la conique C_{2n} coïncide avec C_1 , on a

$$(44) \quad \alpha_1 \alpha_n^2 = b_1 \beta_n^2 = c_1 \gamma_n^2$$

et ces équations prennent une forme plus simple si l'on pose comme plus haut

$$(45) \quad a_1 = a^2, \quad b_1 = b^2, \quad c_1 = c^2.$$

En choisissant convenablement la détermination de a, b, c elles montrent que Γ_n n'est autre que la conique

$$(\Gamma) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 0.$$

Or on peut remarquer que la conique Γ obtenue en

prenant pour le point (a, b, c) l'une des quatre positions définie par (45) est telle que la polaire réciproque de C_0 par rapport à Γ soit C_1 ; l'enveloppe des droites coupées harmoniquement par C_0 et Γ a pour équation

$$(\overline{C_1}) \quad \frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} - \frac{1}{C_1} = 0,$$

où l'on a

$$(46) \quad 2A_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad 2B_1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \quad 2C_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Mais alors les équations (45) et (46) reconstituent le système de départ (33). Ici l'une des quatre coniques Γ est précisément Γ_n , parce que C_{2n} et C_1 coïncident; le pôle de $A_n A'_n$ est précisément A_0 de sorte que $A_0 A_n$ et $A_0 A'_n$ sont deux droites coupées harmoniquement par C_0 et Γ_n , donc tangentes à une conique $\overline{C_1}$ qui n'est autre que C_n : le nombre n est premier avec $2n+1$ de sorte que les droites joignant de n en n les sommets de P_{2n+1} sont toutes tangentes à C_n et forment le polygone P'_{2n+1} inscrit dans C_0 , circonscrit à C_n (ou $\overline{C_1}$), les sommets consécutifs étant conjugués par rapport à Γ_n (ou Γ). Le point (A_1, B_1, C_1) qui sert à définir $\overline{C_1}$, c'est-à-dire C_n , coïncide donc avec (a_n, b_n, c_n) ; ce point (A_1, B_1, C_1) s'obtient donc bien rationnellement, sur S_{2n+1} , en tenant compte de l'équation de S_{2n+1} , au moyen du point (a_1, b_1, c_1) . La substitution birationnelle ainsi trouvée sur S_{2n+1} n'est identique que pour le triangle ($n=1$); d'ailleurs écrire que (a_1, b_1, c_1) , dans la transformation *plane*, coïncide avec son transformé (A_1, B_1, C_1) entraîne les équations

$$a(b^2 + c^2 - a^2) = b(c^2 + a^2 - b^2) = c(a^2 + b^2 - c^2)$$

qui n'ont d'autre solution commune que celles de

$$a + b + c = 0$$

et par suite font retrouver S_3 . Le point (a_1, b_1, c_1) est d'ailleurs le point (A_2, B_2, C_2) déduit de (A_1, B_1, C_1) : en effet, si dans les formules (10) nous employons les grandes lettres A_1, B_1, C_1 , et A_2, B_2, C_2 , nous trouvons pour A_2, B_2, C_2 en fonction de A_1, B_1, C_1 les valeurs fournies pour a_1, b_1, c_1 en fonction de A_1, B_1, C_1 par les formules (33); or pour que la transformation birationnelle sur S_{2n+1} entre (a_1, b_1, c_1) et (A_1, B_1, C_1) fût involutive, il faudrait que (a_1, b_1, c_1) coïncidât avec (A_n, B_n, C_n) : donc sur S_{2n+1} la transformation birationnelle est involutive pour $n = 2$ (pentagone), mais ne l'est plus si $n \geq 3$.

Le polygone P_{2n+1} se trouve être à lui-même son propre polaire réciproque relativement à cette conique Γ qui échange C_0 avec C_1 et le sommet A_0 avec la corde $A_n A_{n+1}$, côté opposé à A_0 dans P_{2n+1} ; or on voit aussitôt, géométriquement ou analytiquement par l'équation de $A_n A_{n+1}$ et les équations (44), que, O_1 étant l'un des sommets du triangle T conjugué commun à C_0 et C_1 , la droite $A_0 O_1$ perce C_0 en un point que j'appellerai B_n et qui est pôle de $A_n A_{n+1}$ par rapport à Γ' ; cette construction répétée sur chaque côté de P_{2n+1} donne un polygone de $4n + 2$ côtés

$$A_0 B_0 A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_i B_i A_{i+1} B_{i+1} \dots A_{2n+1} B_{2n+1} A_0$$

où B_i est le pôle de $A_i A_{i+1}$ et où deux sommets consécutifs sont conjugués par rapport à Γ' , chaque côté touchant la conique enveloppe des sécantes coupées harmoniquement par C_0 et Γ' .

Nous avons ainsi trouvé l'interprétation géométrique des opérations analytiques effectuées.

Problème analogue au problème de Poncelet.

9. Ce qui précède montre l'intérêt du problème suivant : Étant données deux coniques C_0, Γ , dont on peut sans restreindre la généralité ramener les équations à la forme

$$\begin{aligned} (C_0) \quad & x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ (\Gamma) \quad & \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{1}{c} = 0, \end{aligned}$$

existe-t-il un polygone π_n de n côtés inscrit dans C_0 , dont les sommets consécutifs sont conjugués par rapport à Γ ?

S'il en est ainsi, les côtés de π_n enveloppent la conique C_1 enveloppe des droites coupées harmoniquement par C_0 et Γ ; l'équation tangentielle de C_1 est

$$(C_1) \quad u^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + v^2 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = w^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

et si l'on pose

$$(1) \quad a_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad b_1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \quad c_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

la conique C_1 a pour équation ponctuelle

$$(C_1) \quad \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} - \frac{1}{c_1} = 0.$$

Donc, nous reprendrons l'invariant $I_n(a_1, b_1, c_1)$ trouvé précédemment; nous y ferons la substitution (1) et nous aurons la condition nécessaire et suffisante d'existence de $\infty^1 \pi_n$ en égalant le résultat à zéro. Inversement les formules (1) donnent

$$(2) \quad \frac{2}{a} = b_1 + c_1 - a_1, \quad \frac{2}{b} = c_1 + a_1 - b_1, \quad \frac{2}{c} = a_1 + b_1 - c_1,$$

de sorte que si C et C_1 admettent ∞' polygones P_n de Poncelet, il existe une conique Γ et une seule partageant harmoniquement les côtés. Il résulte de là qu'en joignant de p en p les côtés d'un polygone π_n , on retrouve un nouveau polygone de n ou $\frac{n}{2}$ côtés, de définition semblable.

C_0 et Γ étant données *a priori*, nous n'avons en général que les polygones *impropres et repliés*, déjà signalés, au nombre de 4. A ce point de vue, le point A_0 étant pris au hasard sur C_0 , les cordes A_0A_1 et $A_0A'_1$ s'obtiennent en coupant C_0 par la polaire de A_0 relativement à Γ , d'où résultent A_1 et A'_1 ; pour que A_1 et A'_1 coïncident, il faut que cette polaire touche C_0 , il faut donc que A_0 soit sur la conique γ polaire réciproque de C_0 par rapport à Γ : ces deux droites particulières A_0A_1 et $A_0A'_1$ sont d'ailleurs les tangentes issues de A_0 à C_1 , de sorte que cet A_0 particulier se trouve sur C_1 : donc les points communs à C_0 et à la conique γ d'équation

$$(\gamma) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

donnent les polygones impropres π_{2n} et sont les points de base du faisceau linéaire engendré par les coniques C_n . D'autre part, les tangentes à C_0 aux points communs à C_0 et Γ sont tangentes à C_1 : ce sont donc ces points qui fournissent les solutions impropres π_{2n+1} .

Ceci explique pourquoi la recherche d'un trièdre trirectangle, inscrit dans un cône du second degré quelconque C_0 , donne toujours quatre solutions, impropres, en prenant une génératrice isotrope I du cône, puis encore une fois cette génératrice I , puis la génératrice nouvelle J où le plan tangent à C_0 le long de I coupe C_0 ; les trois droites I, I, J sont deux à deux

perpendiculaires, mais ne forment pas un trièdre véritable.

Le *triangle* π_3 fournit la relation bien connue

$$(3) \quad a + b + c = 0.$$

Le *quadrilatère* conduit à trois relations du type $b_1 + c_1 - a_1 = 0$ ou $\frac{1}{a} = 0$, ce qui n'a lieu que si Γ *dégénère en deux droites*; cela est clair *a priori*, car dans $A_0 A_1 A_2 A_3$ la droite $A_1 A_3$ a pour pôles A_0 et A_2 simultanément, de sorte que si A_0 et A_2 sont distincts, Γ se réduit à deux droites Δ et Δ_1 et les deux droites $A_0 A_2$, $A_1 A_3$ concourent au point double (Δ, Δ_1) et sont conjuguées par rapport à Δ et Δ_1 . Par contre si π_1 n'existe pas en général, bien que P_1 existe, on constate que π_2 existe, bien que P_2 n'existe pas; il suffit que C_0 coïncide avec γ , de sorte que $a^2 = b^2 = c^2$ et la conique Γ est l'une des coniques

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 1 = 0, \\ x^2 - y^2 - 1 = 0, \\ -x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Pour le *pentagone* au lieu de partir de l'invariant compliqué

$$I_5(a_1, b_1, c_1)$$

calculé précédemment, il suffit de remarquer que dans le pentagone π_5 , $A_0 A_1 A_2 A'_2 A'_1 A_0$, le côté $A_2 A'_2$ est tangent à C_1 ; or la droite $A_2 A'_2$ s'obtient en menant de A_0 les tangentes à la conique (γ) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0,$$

de sorte que nous retrouvons ici un calcul traité au paragraphe 4: dans l'équation (8), on remplace a_1, b_1, c_1

par a^2 , b^2 , c^2 et l'on a ici pour équation de $A_2 A'_2$

$$(5) \quad x(b^2 + c^2 - a^2) \cos \varphi_0 \\ + y(c^2 + a^2 - b^2) \sin \varphi_0 = a^2 + b^2 - c^2.$$

La condition de contact avec C_1 fournira la condition vraie pour π_5 et la condition parasite relative à π_3 . On a

$$(6) \quad (b^2 + c^2 - a^2)^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \cos^2 \varphi_0 \\ + (c^2 + a^2 - b^2)^2 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \sin^2 \varphi_0 \\ = (a^2 + b^2 - c^2)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Si l'on pose

$$(7) \quad T \equiv a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2,$$

la condition pour que (6) soit *identique* en φ_0 est

$$(8) \quad (T + 4b^2c^2) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ = (T + 4c^2a^2) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \\ = (T + 4a^2b^2) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right).$$

La première équation (8) donne

$$T \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = 4ac(a+c) - 4bc(b+c)$$

ou

$$(a-b)[T - 4abc(a+b+c)] = 0.$$

Les équations (8) exigent donc

$$T = 4abc(a+b+c)$$

et en supprimant la solution parasite $a+b+c=0$ du triangle,

$$(9) \quad (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 4abc = 0.$$

10. Puisque dans un polygone π_n chaque sommet tel que A_0 est le pôle relativement à Γ de la diagonale $A_1A'_1$ joignant les sommets consécutifs à A , il en résulte que l'existence d'un π_{2n} relatif à C_0 et Γ revient à l'existence d'un P_n relatif à C_0 et γ , obtenu en joignant de deux en deux les sommets de π_{2n} . Donc la condition

$$(10) \quad f_n(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

relative à un P_n deviendra la condition

$$(11) \quad f_n(a^2, b^2, c^2) = 0$$

relative à un π_{2n} ; mais la condition (11) relative à un π_{2n} entraîne la condition

$$(12) \quad f_n \left[\frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} \right] = 0,$$

relative aux P_{2n} pour C_0 et C_1 . Nous avons donc retrouvé d'une façon intuitive les circonstances déjà signalées. Nous savons que si n est pair, en supposant f_n relatif à une seule série de P_n , l'équation (11) ne se décompose pas. Nous savons que si n est impair, l'équation (11) contient une solution impropre relative à un π_n parcouru deux fois; un facteur, propre, à conserver est alors, n étant impair,

$$f_n(a_1, a_1 - b_1, a_1 - c_1) = 0$$

ou, pour avoir un π_{2n} relatif à C_0 et Γ ,

$$(13) \quad f_n \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) = 0.$$

Inversement la condition d'existence d'un π_n (C_0, Γ) étant

$$(14) \quad \varphi_n(a, b, c) = 0.$$

on a la condition d'existence d'un P_n (C_0, C_1)

$$(15) \quad \varphi_n \left(\frac{1}{b_1 + c_1 - a_1}, \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1}, \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} \right) = 0,$$

et par suite la condition d'existence d'un $\pi_{2n}(C_0, \Gamma)$

$$(16) \quad \varphi_n \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) = 0.$$

Les mêmes remarques ont lieu : si n est impair, l'équation (16) se décompose rationnellement en quatre facteurs, dont l'un, impropre, reproduit $\varphi_n(a, b, c)$; mais alors les facteurs propres sont obtenus d'une façon remarquablement simple :

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi_n(-a, b, c) = 0, \\ \varphi_n(a, -b, c) = 0, \\ \varphi_n(a, b, -c) = 0. \end{cases}$$

Si n est pair, ce procédé ne réussit plus, l'équation (16) ne se décompose pas.

Appliquons ceci à l'*hexagone* : le triangle donne $a + b + c = 0$. Donc l'hexagone donne

$$(18) \quad (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0.$$

Mais alors nous retrouvons un résultat obtenu comme condition des quadrilatères P_4 relatifs à C_0 et Γ ; C_0 et Γ admettent simultanément des quadrilatères P_4 et des hexagones π_6 . Il est facile de vérifier géométriquement ce fait par la géométrie; C_0 et Γ peuvent être réduits à deux cercles dont le second a son centre ω_1 sur C_0 ; prenons un point A_0 de C_0 et menons une corde arbitraire $A_1A'_1$ de C_0 perpendiculaire à $A_0\omega_1$; le cercle ω_1 se trouve pleinement déterminé par la condition que A_0 soit pôle de $A_1A'_1$; la droite A_0A_2 est alors la perpendiculaire abaissée de A_0 sur ω_1A_1 de sorte que les angles $A'_1A_1\omega_1$ et $A_2A_0\omega_1$ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, et par suite les arcs $\omega_1A'_1$ et ω_1A_2 sont égaux; dans la chaîne $A'_1A_0A_1A_2$ on aboutit par trois chaînons au point A_2

symétrique de A'_1 par rapport à la ligne des centres, donc la continuation de la chaîne par trois chaînons nouveaux reconduit de A_2 en A'_1 et l'hexagone π_6 est formé; la fermeture des P_i est d'ailleurs immédiate (le lecteur fera sans peine la figure).

On peut faire ici l'application d'une propriété générale citée par Halphen : nous avons vu plus haut que l'on peut, de quatre façons différentes, trouver une conique directrice d'une transformation par pôlaïres réciproques échangeant C_0 et Γ : donc il existe ∞^1 hexagones circonscrits à Γ , deux côtés consécutifs de cet hexagone étant conjugués par rapport à C_0 . Cela fait donc un ensemble de *trois* propriétés géométriques distinctes réalisées par le couple C_0, Γ et traduites par l'*unique* relation $b + c - a = 0$.

Le cas de l'*octogone* π_8 est immédiat, puisque le quadrilatère P_i donne, comme on l'a vu,

$$(b_1 + c_1 - a_1)(c_1 + a_1 - b_1)(a_1 + b_1 - c_1) = 0.$$

On a donc pour π_8

$$(19) \quad (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Si nous prenons par exemple deux cercles C_0 et Γ de rayon R et R_1 respectivement, la distance des centres étant D ,

$$(C_0) \quad x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0,$$

nous écrirons entre les racines de l'équation en λ du faisceau $C_0 - \lambda\Gamma = 0$ l'égalité $\lambda_3^3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$; en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{R^2 + R_1^2 - D^2}{R_1^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{R^2}{R_1^2}.$$

On trouve ainsi

$$(20) \quad D^2 - R^2 = \pm DR_1 \sqrt{2}.$$

Soient donc O le centre de C_0 et ω_1, ω_2 deux points inverses l'un de l'autre par rapport à C_0 , ω_1 étant intérieur à C_0 et T étant le point de contact avec C_0 d'une tangente issue de ω_2 . Si l'on prend le centre de Γ en ω_2 , on a

$$D^2 - R^2 = \omega_2 T^2 = D \times \omega_1 \omega_2, \quad R_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on prend le centre de Γ en ω_1 , on a

$$-(D^2 - R^2) = \omega_1 T^2 = D \times \omega_1 \omega_2, \quad R_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{2}}.$$

Donc on peut choisir le centre de Γ arbitrairement soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de C_0 , le rayon de Γ est égal au quotient par $\sqrt{2}$ de la distance du centre de Γ au pied de sa polaire.