

BERTRAND GAMBIER

Problème de Poncelet et problème analogue

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 256-276

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__256_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L¹17d]**PROBLÈME DE PONCELET ET PROBLÈME ANALOGUE ;**

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Poncelet a montré qu'étant donnés une première conique C_0 , un triangle T autopolaire relativement à C_0 , et un entier $n \geq 3$, il existe ∞^1 coniques C_1 , conjuguées par rapport à T , telles que chaque couple (C_0, C_1) admette ∞^1 polygones P_n de n côtés inscrits dans C_0 et circonscrits à C_1 ; pour un tel couple (C_0, C_1) , on peut prendre arbitrairement, soit le premier sommet sur C_0 , soit le premier côté tangent à C_1 . Cette question, devenue classique, a été l'objet de nombreux travaux. Je voudrais montrer comment on peut la résoudre en n'employant que les propriétés les plus simples des

d'où

$$m_0 = A - \frac{B^2 + C^2}{A}.$$

Or il est clair que l'on a

$$A = \Sigma |a_p|^2,$$

et, si l'on pose $a'_p = \alpha_p - \beta_p i$,

$$B + Ci = \Sigma a'_p a_{p+1} :$$

donc finalement on a

$$|x|^2 \leq \Sigma |a_p|^2 - \frac{|\Sigma a'_p a_{p+1}|^2}{\Sigma |a_p|^2}.$$

Les Σ portent sur les indices p allant de -1 à n ; mais il est clair que, dans le premier, on peut ne faire varier p que de 0 à n et, dans le second, de 0 à $n-1$.

H. L.

seules coniques ; j'engagerai néanmoins à lire la solution, basée sur les fonctions elliptiques, donnée, par exemple, dans le traité d'Halphen, soit la solution si élégante, donnée d'après Cayley, par M. Lebesgue aux *Annales de Toulouse* (1922), basée sur les propriétés des cubiques générales et la théorie des groupes de points résiduels.

Je montrerai que la construction de polygones Π_n inscrits dans une conique C_0 , de façon que chaque couple de deux sommets voisins soit conjugué par rapport à une nouvelle conique Γ se ramène à la question étudiée par Poncelet, et inversement. On obtient d'ailleurs un résultat, accidentel, mais curieux, à savoir que si deux coniques C_0 et C_1 admettent ∞^1 quadrilatères $_4$ de Poncelet, elles admettent ∞^1 hexagones Π_6 du nouveau problème.

Nous verrons aussi que l'étude du problème de Poncelet est en relation étroite avec l'itération de substitutions rationnelles effectuées sur des polynômes homogènes à 3 variables.

2. Étant données deux coniques C_0, C_1 , d'un point arbitraire A_0 de C_0 , je mène une tangente à C_1 qui coupe C_0 de nouveau en A_1 ; de A_1 je mène à C_1 la tangente autre que A_0A_1 ; j'obtiens ainsi le point A_2 sur C_0 , et continue ainsi de façon à obtenir une chaîne $A_0A_1 \dots A_i$ de i côtés, inscrite dans C_0 et circonscrite à C_1 . La droite A_0A_i , variable avec A_0 , enveloppe manifestement une conique C_i , car par tout point de C_0 passent deux chaînes et deux seulement admettant A_0 pour premier sommet ; les deux tangentes issues de A_0 à C_i ne se confondent que si les deux tangentes issues de A_0 à C_1 se confondent, donc C_i appartient au faisceau linéaire (C_0, C_1) , quel que soit l'entier i .

Cette remarque est essentielle et donne la clé du problème ⁽¹⁾.

Soient $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ et $A_0 A'_1 \dots A'_n$ les deux chaînes d'ordre n issues d'un point quelconque de C_0 : la droite $A_n A'_n$ enveloppe la conique C_{2n} et l'on a une identité

$$(1) \quad C_{2n} \equiv I_{2n+1} C_0 + I_{2n} C_1,$$

où I_{2n} , I_{2n+1} sont des fonctions algébriques rationnelles et entières des coefficients qui entrent dans les premiers membres C_0 et C_1 des équations des coniques du début. Si l'on écrit les équations numériques

$$(2) \quad I_{2n} = 0,$$

$$(3) \quad I_{2n+1} = 0,$$

tout couple de coniques C_0, C_1 satisfaisant à $I_{2n} = 0$ (ou $I_{2n+1} = 0$) admet ∞^1 polygones P_{2n} de Poncelet (ou ∞^1 polygones P_{2n+1} de Poncelet).

Il faut expliquer un paradoxe : étant donné le point A_0 , les droites $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \dots, A_n A'_n$, qui enveloppent respectivement $C_2, C_4, \dots, C_{2n}$, quand A_0 décrit C_0 , ont des équations rationnelles par rapport aux coordonnées de A_0 ou, si l'on préfère, par rapport au paramètre t qui individualise A_0 sur C_0 . *On a toujours quatre solutions du problème P_{2n} ou P_{2n+1} , car elles correspondent aux tangentes communes aux coniques C_0 et C_{2n} pour P_{2n} et C_1, C_{2n} pour P_{2n+1} : mais ces solutions sont impropres, et connues a priori.*

En effet, prenons comme A_0 un point commun à C_0 et C_1 : A_1 et A'_1 sont confondus, A_2 et A'_2 aussi, $\dots$, A_n et A'_n aussi ; c'est cette remarque qui nous a montré que A_0 appartient à C_i , quel que soit i . Les droites $A_1 A'_1$,

(1) On peut remarquer qu'une chaîne de *zéro* côté donne comme enveloppe C_0 et qu'une chaîne de *un* côté donne C_1 .

$A_2 A'_2, \dots, A_n A'_n$, correspondant à cet A_0 *particulier*, sont des tangentes communes à C_0 et C_2 , ou C_0 et $C_4, \dots$, ou C_0 et C_{2n} . La chaîne *particulière*

$$A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$$

parcourue à partir de cet A_n particulier, pris comme premier sommet, avec $A_n A_{n-1}$ comme premier chaînon, se replie en A_0 sur elle-même et se referme en A_n de sorte qu'elle donne un P_{2n} *impropre*; partir de cet A_n *particulier* avec la tangente autre que $A_n A_{n-1}$ ne referme plus la chaîne; partir sur la chaîne particulière $A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0$ d'un sommet A_i autre que A_n , soit avec la tangente $A_i A_{i-1}$, soit avec la tangente $A_i A_{i+1}$ ne referme pas la chaîne avec $2n$ chaînons. Les quatre points communs à C_0 et C_4 donnent donc les quatre solutions P_{2n} prévues *a priori*, mais *impropres*.

De même, soit B_0 un point de contact avec C_0 d'une tangente commune à C_0 et C_4 ; soit $B_0 B_1$ la tangente à C_4 issue de B_0 et autre que la tangente en B_0 à C_0 ; la chaîne $B_0 B_1 B_2 \dots B_n$ s'en déduit et l'on a manifestement $B'_1 = B_0, B'_2 = B_1, \dots, B'_n = B_{n-1}$; la droite $B_n B_{n-1}$ est donc la droite $B_n B'_n$ relative à ce B_0 *particulier*; donc la chaîne $B_n B_{n-1} \dots B_1 B_0 B_0 B_1 \dots B_{n-1} B_n$ se referme bien en B_n par $(2n+1)$ chaînons consécutifs, et donne un P_{2n+1} *impropre*; mêmes observations que plus haut, il faut partir de B_n (et non de B_i) et avec la tangente $B_n B_{n-1}$.

Formons donc l'équation de $A_n A'_n$ au moyen du paramètre t de A_0 et exprimons que cette droite touche C_0 ou C_4 : nous avons une équation du quatrième degré en t

$$(4) \quad E(t) = 0$$

qui coïncide, *sauf un facteur numérique en t , mais*

fonction des coefficients de C_0 et C_1 , soit I_{2n} ou I_{2n+1} , avec l'équation

$$(5) \quad e(t) = 0$$

que nous pouvons écrire à l'avance, relative aux points communs à C_0 et C_1 ou aux points de contact avec C_0 des tangentes communes à C_0 et C_1 . *Ce facteur I_{2n} ou I_{2n+1} n'est pas numérique par rapport aux coefficients de C_1 et C_0 , sinon on n'aurait jamais de polygones P_n , quelles que fussent C_0 et C_1 : or l'existence de polygones réguliers dément cette impossibilité. Quel que soit n , il existe donc des couples de coniques admettant des polygones P_n de Poncelet.*

Nous retombons donc sur le même résultat que plus haut : $I_n \neq 0$, impossibilité des P_n véritables ; $I_n = 0$, ∞ polygones P_n . Il suffit donc d'avoir constaté l'existence d'un polygone P_n (véritable) inscrit à C_0 , circonscrit à C_1 pour en déduire l'existence de ∞ polygones de même espèce ; cela tient à ce que, en dehors des quatre tangentes impropres du cas général, la conique C_0 (ou C_1) admet avec la conique $C_{\frac{n}{2}}$ si n est pair (ou $C_{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair) n tangentes nouvelles, de sorte qu'il y a identité des deux coniques.

3. Dans le cas où les polygones P_n véritables existent, on peut partir d'un point arbitraire de C_0 et l'on revient en ce point au bout de n chaînons. Étudions à ce point de vue les points particuliers A_0 communs à C_0 et C_1 et les points B_0 de contact avec C_0 d'une tangente commune à C_0 et C_1 .

1° Existence du polygone P_{2n} : en partant de A_0 , n chaînons conduisent en un nouveau point commun

à C_0 et C_1 ; en partant de B_0 avec la tangente à C_1 distincte de la tangente en B_0 à C_0 , $n - 1$ chaînons conduisent en un nouveau point de contact d'une tangente commune.

2° Existence du polygone P_{2n+1} : partant de A_0 , n chaînons conduisent en un point B_0 de contact avec C_0 d'une tangente commune; inversement, partir de B_0 conduit en A_0 .

L'un de ces critères nouveaux est nécessaire et suffisant.

Sans avoir recours à ces critères particuliers, nous pouvions donner des exemples de ∞^1 , P_3 , P_4 ou P_5 , puisque l'on peut faire passer une conique par 3, 4 ou 5 points arbitraires et inscrire une conique dans un polygone de 3, 4 ou 5 droites arbitraires. Avec les nouveaux critères on peut donner des exemples graphiques de P_6 , P_7 ou P_8 en se donnant arbitrairement C_0 et une chaîne spéciale convenablement choisie; par exemple pour l'octogone, trois cordes consécutives de C_0 et les tangentes aux deux extrémités déterminent complètement la conique C_1 tangente à ces cinq droites (tandis qu'une chaîne de quatre cordes de C_0 donnerait quatre tangentes à C_1 et les points de contact de deux d'entre elles).

4. Dans le cas général, la suite illimitée

$$C_0 C_1 C_2 \dots C_n C_{n+1} \dots$$

n'est pas périodique. Dans le cas de polygones effectifs P_{2n} , on a la réduction exprimée par le schéma

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} C_0 C_1 C_2 \dots C_{2n-p} \dots C_{2n-2} C_{2n-1} C_{2n} C_{2n+1} C_{2n+2} \dots, \\ C_0 C_1 C_2 \dots C_p \dots C_2 \quad C_1 \quad C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad \dots \end{array} \right.$$

Pour les polygones P_{2n+1} on a de même

$$(7) \begin{cases} C_0 C_1 C_2 \dots C_{2n-p} \dots C_{2n-2} C_{2n-1} C_{2n} C_{2n+1} C_{2n+2} C_{2n+1} \dots, \\ C_0 C_1 C_2 \dots C_{p+1} \dots C_3 C_2 C_1 C_0 C_1 C_2 \dots \end{cases}$$

Réciproquement, écrire la seule équation $C_p = C_{2n-p}$ suffit pour exprimer la possibilité des P_{2n} ; cela fait bien une équation unique, puisqu'il s'agit de coniques d'un même faisceau linéaire; mais ce procédé, qui a l'avantage de ne pas obliger à former successivement les équations des coniques $C_2, C_4, \dots$ jusqu'à C_{2n} compris, a l'inconvénient d'introduire des solutions étrangères; ainsi écrire $C_2 = C_{2n-2}$ entraîne soit P_{2n} , soit P_{2n-4} , comme on le voit en écrivant de nouveau les lignes (6) en y remplaçant n par $n-2$. De même, écrire $C_{2n} = C_4$ entraîne soit P_{2n+4} , soit P_{2n-4} ; ce mode *particulier* de calcul fait donc apparaître, comme facteurs parasites, des invariants déjà rencontrés dans les calculs successifs relatifs à $P_3, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$. Écrire $C_{2n} = C_0$ n'introduit pas de tels facteurs parasites.

Mais si n n'est pas premier, *quel que soit le mode de calcul employé*, on retrouve comme facteurs étrangers les conditions déjà rencontrées pour les diviseurs de n ; en effet un polygone proprement dit P_{n_1} parcouru n_2 fois consécutivement est encore un polygone (non replié) de $n_1 n_2$ côtés. On saura donc éliminer ces facteurs parasites.

On remarquera que, si p est premier avec n , et si C_0 et C_1 admettent des polygones P_n , il en est de même de C_0 et C_p ; si p et n ont un plus grand commun diviseur δ , C_0 et C_p admettent des polygones $P_{\frac{n}{\delta}}$.

Enfin une dernière remarque très simple : si l'on étudie le cas P_{2n} , la conique C_n se réduit nécessaire-

ment à un point et ce point est l'un des trois sommets du triangle autopolaire commun à C_0 et C_1 : se donner C_0 et ce triangle donne donc *trois séries* analytiquement distinctes de coniques C_1 . C'est ce qui explique pourquoi, en cherchant les quadrilatères à la fois inscriptibles dans un cercle et circonscrits à un autre, on trouve *deux catégories* distinctes : R , R_1 étant les rayons des cercles C_0 , C_1 et D la distance des centres, on a soit

$$R_1 = D,$$

soit

$$\frac{1}{(R-D)^2} + \frac{1}{(R+D)^2} = \frac{1}{R_1^2},$$

de sorte que dans le premier cas C_0 passe par le centre de C_1 et les sommets opposés du quadrilatère sont symétriques par rapport à la ligne des centres, tandis que dans le second cas, les diagonales du quadrilatère passent toutes deux en l'un des cercles de rayon nul appartenant au faisceau (C_0, C_1) .

On remarquera qu'il est intéressant de supposer les polygones P_n réels, donc C_0 et C_1 réelles toutes deux, la totalité ou une portion de C_0 étant extérieure à C_1 . Or, pourvu que les équations de C_0 et C_1 soient à coefficients réels, le triangle autopolaire commun est réel et l'un des sommets est *intérieur* à C_0 : donc par une perspective *réelle* qui renvoie le côté opposé à l'infini, on peut supposer que C_0 et C_1 ont le même centre et que C_0 est du genre *ellipse*; cela fait, la transformation homographique bien connue transforme C_0 en un *cercle* : on peut donc, sans restreindre la généralité, prendre les équations des coniques sous la *forme réduite*

$$(C_0) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$(C_1) \quad \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} - \frac{1}{c_1} = 0,$$

les notations étant choisies de façon que les formules de récurrence que nous développerons plus bas aient la forme la plus simple. Quand on revient aux équations générales (précédant l'homographie ou perspective), il suffit de remarquer que l'équation

$$C_0 - \lambda C_1 = 0$$

se réduit à deux droites pour $\lambda = a_1, b_1, c_1$; donc on se rappellera que a_1, b_1, c_1 sont les racines de l'équation bien connue

$$\Delta - \theta \lambda + \theta_1 \lambda^2 - \Delta_1 = 0$$

dont le premier membre est le discriminant de $C_0 - \lambda C_1$.

5. Soient $(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ les coordonnées du point A_0 . La droite $A_0 A_1$ a pour équation

$$x \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} + y \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} = 0.$$

La condition de contact avec C_1 prend la forme

$$(b_1 + c_1 - a_1) \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \\ + (c_1 + a_1 - b_1) \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 - (a_1 + b_1 - c_1) = 0,$$

de sorte que l'équation de $A_1 A'_1$ est

$$(8) \quad x(b_1 + c_1 - a_1) \cos \varphi_0 \\ + (c_1 + a_1 - b_1) \sin \varphi_0 - (a_1 + b_1 - c_1) = 0.$$

Nous avons donc la condition d'existence des *quadrilatères* P_1

$$I_1 \equiv (b_1 + c_1 - a_1)(c_1 + a_1 - b_1)(a_1 + b_1 - c_1) = 0.$$

[Si l'on applique ceci à deux cercles rapportés à leur ligne des centres et à leur axe radical

$$C_0 \equiv x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0,$$

les racines de l'équation en λ s'obtiennent aisément et l'on trouve

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{R^2 + R_1^2 - D^2}{R_1^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{R^2}{R_1^2}, \quad \lambda_3 = 1,$$

de sorte que

$$\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$$

donne $D = \pm R$ et $\lambda_3 = \pm (\lambda_1 - \lambda_2)$ donne la relation annoncée plus haut.]

De l'équation (8) on déduit l'équation ponctuelle de C_2

$$C_2 \equiv (b_1 + c_1 - a_1)^2 x^2 + (c_1 + a_1 - b_1)^2 y^2 - (a_1 + b_1 - c_1)^2 = 0.$$

et l'on trouve immédiatement en posant

$$I_3 \equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1, \\ C_2 \equiv I_3 C_0 + 4a_1b_1c_1C_1.$$

La condition d'existence des *triangles* P_3 est donc

$$I_3 = 0.$$

D'ailleurs, si l'on adopte la seconde marche de calcul proposée et si l'on écrit que $A_1 A'_1$ est tangente à C_1 on trouve pour φ_0 l'équation

$$(9) \quad a_1(b_1 + c_1 - a_1)^2 \cos^2 \varphi_0 + b_1(c_1 + a_1 - b_1)^2 \sin^2 \varphi_0 - (a_1 + b_1 - c_1)^2 = 0,$$

qui, par adjonction au premier membre de la quantité identiquement nulle

$$-4a_1b_1c_1 \cos^2 \varphi_0 - 4b_1c_1a_1 \sin^2 \varphi_0 + 4c_1a_1b_1,$$

devient

$$I_3(a_1 \cos^2 \varphi_0 + b_1 \sin^2 \varphi_0 - c_1) = 0,$$

et nous vérifions ainsi toutes les circonstances annoncées *a priori*.

Nous voyons aussitôt que $A_2 A'_2$ joue par rapport à C_2 le rôle de $A_1 A'_1$ par rapport à C_1 , la conique C_0 restant la même dans les deux cas. Si donc on pose

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \\ b_2 = \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \\ c_2 = \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2}; \end{array} \right.$$

on a, d'après les calculs qui précèdent, appliqués à C_0 et C_2 ,

$$C_4 \equiv (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2)C_0 + 4a_2b_2c_2C_2,$$

et ceci fournit aussitôt la relation *nécessaire* pour les hexagones P_6 , obtenue en annulant le coefficient de C_0 de façon que C_4 et C_2 coïncident. Cette relation se décompose en

$$(11) \quad \left(\frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} + \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} + \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} \right) \\ \times \left(\frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} + \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} - \frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} \right) \\ \times \left(\frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} + \frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} - \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} \right) \\ \times \left(\frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} + \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} - \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} \right) = 0.$$

Le premier facteur qui est symétrique en a_1, b_1, c_1 ne peut être que le facteur I_3 parasite, relatif au triangle; c'est ce que l'on vérifie sans peine en le rendant entier; on ne garde donc que les trois derniers qui expriment d'ailleurs que C_3 se réduit à l'un des sommets du triangle autopolaire.

Exprimons maintenant C_4 en C_0 et C_1 , ce qui est facile en remplaçant C_2 par l'expression déjà obtenue:

on a

$$(12) \quad C_4 \equiv [a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2 + 4a_2b_2c_2I_3]C_0 \\ + 16a_2b_2c_2a_1b_1c_1C_1.$$

La condition d'existence des *pentagones* est donc

$$(13) \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2 + 4a_2b_2c_2I_3 = 0.$$

Nous savons que cette condition doit contenir le facteur parasite I_3 relatif aux P_3 ; cela a été signalé par la décomposition (11) de l'expression $2\Sigma b_2c_2 - \Sigma a_2^2$; on trouve ainsi les conditions définitives pour l'hexagone ou le pentagone

$$(11') \quad I_6 \equiv [(a_1 + b_1 + c_1)^2 - 4(a_1^2 + b_1c_1)] \\ \times [(a_1 + b_1 + c_1)^2 - 4(b_1^2 + c_1a_1)] \\ \times [(a_1 + b_1 + c_1)^2 - 4(c_1^2 + a_1b_1)] = 0,$$

$$(13') \quad I_5 \equiv I_6 + 4I_4^2 = 0.$$

La forme (12) de C_4 masque légèrement la condition d'identité de C_4 avec C_0 , c'est-à-dire d'existence des quadrilatères P_4 : il suffit de rendre l'équation entière en a_1, b_1, c_1 , ou de multiplier par

$$(b_1 + c_1 - a_1)^4 (c_1 + a_1 - b_1)^4 (a_1 + b_1 - c_1)^4$$

pour retrouver la condition $I_4 = 0$.

Pour obtenir la condition relative à l'*octogone* P_8 , il suffit d'exprimer que C_0 et C_2 admettent des quadrilatères de Poncelet; on trouve ainsi

$$I_8 \equiv (b_2 + c_2 - a_2)(c_2 + a_2 - b_2)(a_2 + b_2 - c_2) = 0.$$

Ces exemples suffisent pour montrer la souplesse et la puissance de la méthode.

6. Indiquons maintenant comment par récurrence

on trouvera les équations des coniques $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots, C_{2n} \dots$ successives. Prenons l'équation de la conique C_n sous la forme

$$(C_n) \quad \frac{x^2}{a_n} + \frac{y^2}{b_n} - \frac{z^2}{c_n} = 0;$$

alors le calcul fait au début du paragraphe 4 s'applique aussi bien au couple (C_0, C_n) qu'au couple (C_0, C_1) : posons donc

$$(14) \quad \begin{cases} x_n = b_n + c_n - a_n & 2a_n = \beta_n + \gamma_n, \\ \beta_n = c_n + a_n - b_n & \text{ou} \quad 2b_n = \gamma_n + \alpha_n, \\ \gamma_n = a_n + b_n - c_n & 2c_n = \alpha_n + \beta_n. \end{cases}$$

Les paramètres φ_0 et φ_n sont liés par la relation

$$(15) \quad \alpha_n \cos \varphi_0 \cos \varphi_n + \beta_n \sin \varphi_0 \sin \varphi_n - \gamma_n = 0,$$

l'équation de $A_n A'_n$ est

$$(16) \quad \alpha_n x \cos \varphi_0 + \beta_n y \sin \varphi_0 - \gamma_n = 0,$$

l'équation ponctuelle de C_{2n} est

$$(17) \quad \alpha_n^2 x^2 + \beta_n^2 y^2 - \gamma_n^2 = 0.$$

(La condition de possibilité des P_{4n} est $\alpha_n \beta_n \gamma_n = 0$.)

Pour abrégé écrivons

$$(18) \quad \lambda_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad \mu_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \lambda_i = \frac{\gamma_i}{\alpha_i}, \quad \mu_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

On a donc

$$(19) \quad \begin{cases} \cos \varphi_0 \cos \varphi_{n-1} + \mu_{n-1} \sin \varphi_0 \sin \varphi_{n-1} - \lambda_{n-1} = 0, \\ \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_n + \mu_1 \sin \varphi_{n-1} \sin \varphi_n - \lambda_1 = 0, \end{cases}$$

et l'élimination de $\cos \varphi_{n-1}, \sin \varphi_{n-1}$ entre les équations

tions (19) donne

$$(20) \quad \begin{aligned} & [-\lambda_1 \mu_{n-1} \sin \varphi_0 + \lambda_{n-1} \mu_1 \sin \varphi_n]^2 \\ & + [-\lambda_{n-1} \cos \varphi_n + \lambda_1 \cos \varphi_0]^2 \\ & - [\mu_1 \cos \varphi_0 \sin \varphi_n - \mu_{n-1} \sin \varphi_0 \cos \varphi_n]^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette relation (20), malheureusement, est vérifiée, en parasite, par l'angle φ_{n-2} ou φ'_{n-2} , au lieu d'être simplement vérifiée par φ_n et φ'_n . Donc le premier membre de (20) est identique au produit

$$(21) \quad \begin{aligned} & H_n [\cos \varphi_0 \cos \varphi_n + \mu_{n-2} \sin \varphi_0 \sin \varphi_n - \lambda_{n-2}] \\ & \times [\cos \varphi_0 \cos \varphi_n + \mu_n \sin \varphi_0 \sin \varphi_n - \lambda_n]. \end{aligned}$$

Ordonnons donc les premiers membres de (20) ou (21) suivant les quantités suivantes, à l'exclusion de toute autre,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \sin^2 \varphi_0 & \sin^2 \varphi_n & \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_n \\ \sin \varphi_0 \sin \varphi_n & \cos \varphi_0 \cos \varphi_n & \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_n \cos \varphi_n \end{array} \right.$$

les termes du type de la première ligne (22) donnent

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 + \lambda_{n-1}^2 = H_n [\lambda_{n-2} \lambda_n + 1], \\ \mu_1^2 + \mu_{n-1}^2 = H_n [\mu_{n-2} \mu_n + 1], \\ \lambda_1^2 \mu_{n-1}^2 - \lambda_1^2 \mu_{n-1}^2 - \mu_{n-1}^2 = -H_n, \\ \lambda_{n-1}^2 \mu_1^2 - \lambda_{n-1}^2 \mu_1^2 - \mu_1^2 = -H_n. \end{array} \right.$$

Les termes de la seconde ligne (22) donnent

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \lambda_1 \mu_1 \lambda_{n-1} \mu_{n-1} = H_n [\lambda_{n-2} \mu_n + \mu_{n-2} \lambda_n], \\ 2 \lambda_1 \lambda_{n-1} = H_n [\lambda_{n-2} + \lambda_n], \\ 2 \mu_1 \mu_{n-1} = H_n [\mu_{n-2} + \mu_n]. \end{array} \right.$$

Cela fait 7 équations pour les inconnues λ_n, μ_n, H_n à calculer en fonction des quantités $\lambda_0 = 1, \mu_0 = 1, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_{n-1}$ supposées déjà calculées. Ces équations sont compatibles bien entendu; les deux dernières équations (23) donnent

$$1 - H_n = (1 - \lambda_1^2) (1 - \mu_{n-1}^2) = (1 - \lambda_{n-1}^2) (1 - \mu_1^2).$$

Si l'on pose

$$(25) \quad k^2 = \frac{1 - \mu_1^2}{1 - \lambda_1^2} = \frac{1 - \mu_{n-1}^2}{1 - \lambda_{n-1}^2} = \frac{c_1}{b_1} \frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1},$$

k est une quantité connue et l'on a les formules, qui résolvent la question,

$$(26) \quad \begin{cases} H_n = 1 - k^2 (1 - \lambda_1^2) (1 - \lambda_{n-1}^2), \\ \lambda_n = \frac{2\lambda_1 \lambda_{n-1}}{H_n} - \lambda_{n-2}, \\ \mu_n = \frac{2\mu_1 \mu_{n-1}}{H_n} - \mu_{n-2}. \end{cases}$$

La constance du rapport $\frac{1 - \mu_n^2}{1 - \lambda_n^2}$ signifie simplement que toutes les coniques C_n contiennent les points communs à C_0 et C_1 . Le calcul ainsi conduit montre que les équations de C_n et C_{2n} s'obtiennent ensemble; dans notre méthode, nous avons besoin de former l'identité

$$C_{2n} \equiv I_{2n+1} C_0 + I_{2n} C_1.$$

Or on a le droit d'écrire, en prenant

$$(27) \quad \begin{cases} C_{2n} \equiv x^2 + \mu_n^2 y^2 - \lambda_n^2 z^2, \\ 1 = I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{a_1}, \\ \mu_n^2 = I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{b_1}, \\ \lambda_n^2 = I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{c_1}, \end{cases}$$

de sorte que

$$(28) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right) I_{2n} = 1 - \mu_n^2, & a_1 - b_1 \mu_n^2 = (a_1 - b_1) I_{2n+1}, \\ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{c_1} \right) I_{2n} = 1 - \lambda_n^2, & a_1 - c_1 \lambda_n^2 = (a_1 - c_1) I_{2n+1}. \end{cases}$$

Ces relations montrent clairement que la condition $I_{2n} = 0$ s'obtient en cherchant le plus grand commun

diviseur des expressions $\mu_n^2 - 1$ et $\lambda_n^2 - 1$, qui sont rationnelles en a_1, b_1, c_1 et l'égalant à zéro (on retrouve d'ailleurs ici la constante du rapport $\frac{1 - \mu_n^2}{1 - \lambda_n^2}$). On remarque d'ailleurs que C_{2n} ayant pour équation

$$x^2 + \mu_n^2 y^2 - \lambda_n^2 = 0,$$

il y a à étudier les quatre combinaisons

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \mu_n = 1, \\ \lambda_n &= 1, \quad \mu_n = -1, \\ \lambda_n &= -1, \quad \mu_n = 1, \\ \lambda_n &= -1, \quad \mu_n = -1. \end{aligned}$$

Mais l'équation (16) obtenue pour $A_n A'_n$ ou

$$x \cos \varphi_0 + \mu_n y \cos \varphi_0 - \lambda_n = 0$$

montre que la première combinaison est à rejeter, car on aurait alors $A_n = A'_n = A_0$ et il s'agirait d'un P_n et non pas d'un P_{2n} . La combinaison $\lambda_n = -1, \mu_n = 1$ par exemple [montre que $A_n A'_n$ est tangente au point $\varphi_0 + \pi$ à C_0 : c'est le point diamétralement opposé à A_0 : on pourra donc se borner à chercher le plus grand commun diviseur de $1 + \lambda_n$ et $\mu_n - 1$; une permutation circulaire effectuée ensuite sur a_1, b_1, c_1 donnera les deux autres diviseurs analogues ; en égalant chacun à zéro, on a l'une des séries C_i admettant avec $C_0 \infty^1$ polygones P_{2n} . On aura de même pour P_{2n+1} à égaliser à zéro le plus grand commun diviseur de $a_1 - b_1 \mu_n^2$, et $a_1 - c_1 \lambda_n^2$ ou simplement le quotient $\frac{a_1 - b_1 \mu_n^2}{a_1 - b_1}$.

7. Ici se place la remarque simple : si $n = pq$, l'existence de P_n pour C_0 et C_i revient à l'existence de P_p pour C_0 et C_q ; autrement dit, si

$$(29) \quad f_p(a_1, b_1, c_1) = 0$$

est la condition d'existence des P_p pour C_0 et C_1 , la condition

$$(30) \quad f_p(a_q, b_q, c_q) = 0$$

est la condition d'existence des P_{pq} pour C_0 et C_1 . Nous avons précisé, au paragraphe précédent, montré comment a_q, b_q, c_q s'obtiennent rationnellement au moyen de a_1, b_1, c_1 ; dans l'expression (30) on remplace a_q, b_q, c_q par ces expressions en a_1, b_1, c_1 ; c'est cette opération que j'appelle substitution $(a_1, b_1, c_1; a_q, b_q, c_q)$. Si donc on effectue la décomposition de l'entier n en facteurs premiers

$$n = p^p q^q r^r \dots,$$

on pourra partir par exemple de l'expression

$$f_p(a_1, b_1, c_1)$$

et l'on y effectuera $P - 1$ fois successivement la substitution $(a_1, b_1, c_1; a_p, b_p, c_p)$, puis dans le résultat obtenu Q fois la substitution $(a_1, b_1, c_1; a_q, b_q, c_q)$ et ainsi de suite.

8. Appliquons ce qui précède à la recherche des conditions d'existence de P_n et P_{2n} . La relation relative aux P_n

$$(31) \quad f_n(a_1, b_1, c_1) = 0$$

sera remplacée pour les P_{2n} par la condition

$$(32) \quad f_n \left[\frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} \right] = 0$$

ou du moins la relation (32) rendue entière, débarrassée du facteur parasite éventuel $f_n(a_1, b_1, c_1)$ relatif à un P_n parcouru deux fois est la condition cherchée pour les P_{2n} .

Écrivons donc les formules de substitution

$$(33) \quad \begin{cases} a_1 = a^2, & b_1 = b^2, & c_1 = c^2, \\ a = \frac{1}{B_1 + C_1 - A_1}, & b = \frac{1}{C_1 + A_1 - B_1}, & c = \frac{1}{A_1 + B_1 - C_1}, \end{cases}$$

où j'écris A_1, B_1, C_1 pour plus de clarté. Je considère $(a_1, b_1, c_1), (a, b, c), (A_1, B_1, C_1)$ comme des coordonnées ponctuelles homogènes; la transformation *plane* $(A_1, B_1, C_1; a_1, b_1, c_1)$ n'est pas birationnelle, car au point (A_1, B_1, C_1) correspond bien rationnellement un seul point (a_1, b_1, c_1) , mais au point (a_1, b_1, c_1) correspond quatre points $(A_1, B_1, C_1), (A'_1, B'_1, C'_1), (A''_1, B''_1, C''_1), (A'''_1, B'''_1, C'''_1)$ que nous pouvons supposer correspondre aux points intermédiaires respectifs $(a, b, c), (-a, b, c), (a, -b, c), (a, b, -c)$.

On a donc

$$(34) \quad \begin{cases} 2A_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, & 2A'_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ 2B_1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, & 2B'_1 = \frac{1}{c} - \frac{1}{a}, \\ 2C_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, & 2C'_1 = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \end{cases}$$

d'où l'on conclut entre les points $(A_1, B_1, C_1), (A'_1, B'_1, C'_1)$ les formules birationnelles involutives

$$(35) \quad \begin{cases} A'_1 = A_1, & B'_1 = A_1 - C_1, & C'_1 = A_1 - B_1, \\ A_1 = A'_1, & B_1 = A'_1 - C'_1, & C_1 = A'_1 - B'_1. \end{cases}$$

Nous allons trouver une simplification considérable dans le cas où l'entier n est impair. Mettons en évidence la parité et écrivons la condition relative aux P_{2n+1} , soit

$$(36) \quad f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0.$$

On a d'abord ce résultat : l'expression $f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1)$

est symétrique en a_1, b_1, c_1 , et de plus l'équation

$$(37) \quad f_{2n+1}(a^2, b^2, c^2) = 0$$

se décompose *rationnellement en quatre facteurs*, dont l'un, rendu entier en A_1, B_1, C_1 , reproduit $f_{2n+1}(A_1, B_1, C_1)$; ce facteur est symétrique en a, b, c ; nous le désignerons par $R_{2n+1}(a, b, c)$ et il correspond à un P_{2n+1} parcouru deux fois; on a l'identité

$$(38) \quad f_{2n+1}(a^2, b^2, c^2) \equiv \varepsilon R_{2n+1}(a, b, c) R_{2n+1}(-a, b, c), \\ \times R_{2n+1}(a, -b, c) R_{2n+1}(a, b, -c),$$

où ε est un facteur numérique; chacun des facteurs $R_{2n+1}(-a, b, c)$ et analogues correspond à l'une des trois séries de P_{4n+2} qui se différencient l'une de l'autre par le choix du sommet du triangle autopolaire T où passent les diagonales de P_{4n+2} joignant les sommets opposés. Exemple :

$$f_3(a_1, b_1, c_1) \equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1, \\ f_3(a^2, b^2, c^2) \equiv -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

On peut encore remarquer qu'en raison de la symétrie de R_{2n+1} en a, b, c les trois facteurs $R_{2n+1}(-a, b, c)$, $R_{2n+1}(a, -b, c)$ ou $R_{2n+1}(a, b, -c)$ se déduisent l'un de l'autre par permutations circulaires.

D'autre part $R_{2n+1}(a, b, c)$ exprimé en A_1, B_1, C_1 donne la relation $f_{2n+1}(A_1, B_1, C_1) = 0$, donc

$$R_{2n+1}(-a, b, c)$$

donne de même $f_{2n+1}(A'_1, B'_1, C'_1) = 0$: donc, en vertu de (35), l'équation

$$(39) \quad f_{2n+1}(a_1, a_1 - c_1, a_1 - b_1) = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une série de P_{4n+2} si

$$f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante d'existence des P_{2n+1} .

En vertu de la symétrie, écrire

$$f_{2n+1}(a_1, a_1 - b_1, a_1 - c_1)$$

revient au même qu'écrire

$$f_{2n+1}(a_1, a_1 - c_1, a_1 - b_1).$$

Nous avons ainsi, dans le cas où n est impair, considérablement abrégé les calculs : sous la forme (32), il y a en effet une décomposition en quatre facteurs à effectuer, nous avons montré comment on trouve chacun d'eux. La vérification est aisée à faire pour le triangle et l'hexagone [voir formules (11) et (11')].

Dans le cas où l'on part d'un polygone P_{2n} , le procédé de simplification ne s'applique plus ; il faut revenir à la formule (32) ; nous supposons que l'équation

$$(40) \quad f_{2n}(a_1, b_1, c_1) = 0$$

soit l'une des conditions, *irréductible*, d'existence d'un P_{2n} pour lequel les diagonales joignant deux sommets opposés passent par *un* sommet déterminé de T ; l'équation

$$(41) \quad f_{2n} \left[\frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} \right] = 0$$

ne se décompose plus ; c'est la condition nécessaire et suffisante d'existence de P_{2n} , relatifs au même sommet du triangle conjugué commun T. La vérification est facile à faire : pour le quadrilatère, on a eu, par exemple,

$$b_1 + c_1 - a_1 = 0,$$

d'où, pour l'octogone, la relation

$$\frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2} + \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} - \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2} = 0,$$

(276)

ou si l'on préfère

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

qui est indécomposable.

(*A suivre.*)
