GEORGES BOULIGAND

Sur quelques applications des méthodes vectorielles

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 245-251

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__245_1>

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES MÉTHODES VECTORIELLES;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. J'ai donné, dans mes *Leçons de Géométrie vectorielle*, n° 69, une théorie intrinsèque des formes quadratiques de vecteurs, indépendante du nombre des dimensions de l'espace., inspirée d'une définition classique de la *forme polaire*, au moyen de l'identité (¹)

$$Q\left(\lambda\vec{U}+\mu\vec{V}\right)=\lambda^2 Q\left(\vec{U}\right)+2\lambda\mu P\left(\vec{U},\vec{V}\right)+\mu^2 Q\left(\vec{V}\right).$$

Si P s'annule pour deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on dit que ces vecteurs sont *conjugués* par rapport à la forme Q. Il n'y a pas de difficulté à saisir le lien qui existe entre cette définition et les notions familières de la théorie des pôles et des polaires.

On peut d'abord remarquer que les relations qui, à l'exemple de $P\left(\vec{U},\vec{V}\right)=0$, sont indifférentes à la mul-

(¹) *Cf.* WEYL, *Temps, espace, matière*, p. 21 et suivantes.

tiplication de chaque vecteur qu'elles renferment par un scalaire, expriment des *propriétés projectives;* le centre de projection, c'est l'origine commune qu'on pourrait, arbitrairement, assigner aux vecteurs tels que $\vec{U}$, $\vec{V}$. On peut encore dire qu'on obtient la géométrie projective à n dimensions en prélevant, dans la géométrie linéaire à $n+1$, les théorèmes sur les vecteurs libres qui concernent, d'une manière exclusive, leurs directions.

Nous avons justement ici un exemple de cette nature. En écrivant que $P(\lambda\vec{U}+\mu\vec{V})$ est nul, nous exprimons aussi le fait suivant : en attribuant une même origine à tous les vecteurs dont nous parlerons, le vecteur $\lambda\vec{U}+\mu\vec{V}$ ne peut se trouver sur le cône d'annulation de Q, sans qu'il en soit de même du vecteur $\lambda\vec{U}-\mu\vec{V}$. Or le lecteur verra sans peine que le faisceau des vecteurs concourants et coplanaires

$$\vec{U},\quad \vec{V},\quad \lambda\vec{U}-\mu\vec{V},\quad \lambda\vec{U}-\mu\vec{V}$$

est harmonique, et ceci nous ramène à des propositions classiques, qui se trouvent ainsi rattachées à notre theorie d'une manière suffisamment nette pour qu'il ne soit pas nécessaire d'insister.

II. La theorie des diamètres et plans diamétraux des quadriques n'est qu'un cas limite de la précédente. Mais on peut retrouver rapidement ses résultats essentiels à partir d'un autre point de vue. Proposons-nous d'étudier un *champ scalaire du second degré.* On peut utiliser les remarques suivantes :

1° Son champ de gradients est un *champ vectoriel* *du premier degré*, possédant les mêmes éléments de symétrie. Donc le centre d'un champ scalaire du second degré est le point, s'il existe, où le gradient s'annule. Et même, s'il existe une infinité de centres, ce sont encore des points d'annulation du gradient.

2° Un champ vectoriel du premier degré est inaltéré par une homothétie faite de son centre, ce qui explique que les quadriques de niveau d'un champ scalaire du second degré soient homothétiques et concentriques. Exceptionnellement, le centre peut être rejeté à l'infini, et l'homothétie dégénérer en translation.

3° La section d'un champ scalaire à trois dimensions par un plan est un champ scalaire à deux dimensions dont le gradient est la projection orthogonale [1] du gradient du premier sur le plan de section. Il s'ensuit que le diamètre conjugué d'une direction de plans, c'est-à-dire le lieu des centres des champs scalaires du second degré, s'obtient en exprimant l'orthogonalité du gradient, relatif au champ à trois dimensions, soit $f(M)$, et de ces plans. Soit $\vec{\nu}$ un vecteur normal. Ce diamètre conjugué aura pour équation

$$\vec{\nu} = \lambda \, \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$$

λ désignant un scalaire indéterminé, relation qui équivaut aux équations classiques

$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta} = \frac{f'_z}{\gamma}.$$

4° Pareillement, le plan diamétral conjugué des

---

[1] On pourrait se passer, dans cette question essentiellement linéaire, de considérations métriques, en introduisant la notion de gradient linéaire (*loc. cit.*, n° 143).

droites parallèles à $\vec{\nu}$ est aussi le lieu des centres des champs à une dimension, interceptés par ces droites. Il est donc défini par

$$\vec{\nu}.\overrightarrow{\text{grad}}\,f = 0$$

ou

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

III. Je voudrais enfin rectifier deux erreurs, commises dans le travail cité, au cours de rédactions trop hâtives.

La première est relative aux ombilics (n° 138). Il n'est pas exact qu'un ombilic livre nécessairement passage à une infinité de lignes de courbure. Du fait que la direction d'un champ devient indéterminée (le champ est ici celui des directions principales), on n'a pas le droit d'en conclure qu'il passe au point d'indétermination une infinité de lignes de champ. C'est là un fait bien classique depuis les mémorables travaux de Poincaré sur les intégrales réelles d'une équation différentielle. Mais, pour ce qui concerne plus particulièrement les ombilics, M. Picard a fait une étude de la question au Tome III de son Traité d'Analyse [1] : je me borne donc à remarquer que, par un ombilic d'une quadrique, il ne passe qu'une seule ligne de courbure réelle.

La seconde se rapporte aux équations différentielles totales de la forme

$$\text{(1)} \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

En général, cette équation n'est pas complètement

[1] Section III du Chapitre IX. *Voir* aussi une Note complémentaire au Tome IV de la *Théorie des surfaces* de Darboux.

intégrable, mais on peut, en adoptant le point de vue de Pfaff, chercher les lignes C qui satisfont à l'équation (1). Soit $\vec{V}(M)$ le vecteur de composantes P, Q, R : une ligne C est astreinte à cette condition d'être normale, en chaque point M à $\vec{V}(M)$. Désignons par $\vec{v}(M)$ le vecteur unitaire collinéaire à $\vec{V}(M.)$ On passe de dM aux accroissements géométriques $d\vec{V}$ et $d\vec{v}$ par deux transformations linéaires. Les déplacements dM sur les courbes C satisfont à $\vec{v}.dM = 0$, et comme d'autre part on a $\vec{v}.d\vec{v} = 0$, l'étude de la correspondance entre dM et $d\vec{v}$ est un problème de géométrie plane, dans un plan normal a $\vec{v}$. Le point sur lequel je désire précisément attirer l'attention est que *cette correspondance n'est pas autométrique*, excepté si la condition d'intégrabilité est satisfaite. En conséquence, j'invite le lecteur à supprimer les sept dernières lignes de la Note en petits caractères de la page 288.

Voici la démonstration. Soient d et δ les caractéristiques de deux déplacements infinitésimaux effectués à partir d'un point M sur deux lignes intégrales de l'équation (1). D'après une propriété classique du rotationnel d'un champ vectoriel, appliquée au champ $\vec{v}(M)$ (*loc. cit.*, n° 162), nous avons

$$dM.\delta\vec{v} - d\vec{v}.\delta M = \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v},\ \delta M,\ dM\right).$$

En général, le second membre n'est pas nul; la transformation $(dM, \delta\vec{v})$ n'est donc pas autométrique. Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que l'on ait

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}.(\delta M \wedge dM) = 0$$

ou ce qui revient au même

$$\vec{v}.\text{rot}\,\vec{v} = 0, \tag{2}$$

ce qui nous fournit bien, sous sa forme classique, la condition d'intégrabilité. Si nous revenons au vecteur $\vec{V}$, en vertu de la relation

$$\text{rot}\left(h\vec{v}\right) = h\,\text{rot}\,\vec{v} + \text{grad}\,h \wedge \vec{v}, \qquad \text{ou} \qquad h\vec{v} = \vec{V},$$

la condition (2) conservera la forme

$$\vec{V}.\text{rot}\,\vec{V} = 0.$$

Revenons, dans le cas général, aux lignes intégrales de l'équation (1). En chaque point M d'une telle ligne C, construisons le trièdre fondamental $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$. Nous avons

$$\vec{v} = \vec{N}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta \qquad \text{ou} \qquad \theta = \left(\widehat{\vec{N}, \vec{v}}\right),$$

en divisant et en appliquant les formules de Frenet, on trouve aisément

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = -\rho\cos\theta\,\vec{T} + \left(\tau - \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{\Gamma} \tag{3}$$

en appelant ρ la courbure, τ la torsion de (C) et $\vec{\Gamma}$ un vecteur tel que le trièdre $\vec{T}$, $\vec{\Gamma}$, $\vec{v}$ soit trirectangle et direct. Le vecteur $\vec{\Gamma}$, en théorie des surfaces (théorie qui est englobée dans la présente), serait la normale géodésique. En remarquant que $\frac{d\vec{v}}{ds}$ a même valeur pour toutes les courbes intégrales tangentes en M à une droite donnée, on voit que les quantités $\rho \cos\theta$ et $\tau - \frac{d\theta}{ds}$ sont également bien déterminées en M pour chaque tangente issue de M. On rattache ainsi à la théorie des champs vectoriels des propositions, d'ailleurs anciennes, suivant lesquelles le théorème de Meusnier et le théorème d'Ossian Bonnet sont valables pour les courbes intégrales d'une équation aux différentielles totales. L'étude de ces théorèmes et de leurs conséquences a été approfondie par M. Axel Egnell dans sa Thèse (*Géométrie infinitésimale vectorielle*, Paris, 1919).

Supposons en particulier que le champ $\vec{V}(M)$ soit un champ de moments. Les courbes (C) sont alors les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe de droites de moment nul. Le plan osculateur se confond avec le plan polaire du complexe et l'on a $\theta = \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que la relation (3) se réduit alors à

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \tau\vec{\Gamma}$$

et que l'angle $dM, d\vec{v}$ est constamment droit. Donc, dans ce cas, la transformation lineaire $dM, d\vec{v}$ s'obtient en composant une rotation d'un droit avec une autre transformation linéaire, qui n'est autre qu'une homothétie de rapport τ. Donc ici, τ ne dépend que de M et non de la direction MT de la tangente. Nous retrouvons ce théorème classique de Lie : *Toutes les courbes d'un complexe linéaire qui passent en* M *ont même torsion* (1).

(1) Ce théorème est le point de départ d'un intéressant article de M. Lainé, qui paraîtra ici prochainement.