

Agrégation des sciences mathématiques (1924)

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 220-238

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__220_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1924).

Compositions de Mathématiques spéciales.

Soit (C) la courbe plane définie en axes rectangulaires par les équations

$$(C) \quad x = at^3 + bt^2 - x_0t, \quad y = a't^3 + b't^2 - y_0t;$$

a, b, a', b' sont des constantes données; x_0 et y_0 sont les coordonnées d'un point M_0 qui pourra se déplacer.

I. Démontrer que la courbe (C) n'a un point de rebroussement que si le point M_0 se trouve sur une parabole (P). Quel est, dans ce cas, le lieu géométrique de ce point de rebroussement et quelle est la courbe enveloppe de la tangente de rebroussement? A quelle condition cette enveloppe est-elle la développée d'une parabole?

II. M_0 étant un point quelconque du plan, la

(¹) Ainsi le signe $\sim$, qui devrait être d'un usage courant, est à peine connu des élèves. Il faut par contre, évidemment, éviter l'erreur, fréquente également, qui consiste à créer un langage pour avoir le plaisir de s'en servir. Un mot nouveau doit être introduit lorsque le besoin s'en fait sentir, et dans ce cas seulement.

courbe (C) admet un point double ω . Dans quelle région doit-on choisir le point M_0 pour que ω soit un point double réel? Calculer les coordonnées du point ω en fonction de celles du point M_0 et montrer qu'à un point ω correspond en général un point M_0 et un seul. Quel est le cas d'exception? Où se trouvent alors les points tels que M_0 ?

III. La différentielle de l'arc de la courbe (C) se met sous la forme

$$ds = \sqrt{F(t)} dt,$$

où $F(t)$ est un polynôme du quatrième degré en t . Comment choisir le point M_0 pour que la courbe (C) soit rectifiable; c'est-à-dire pour que $F(t)$ soit le produit d'un polynôme du second degré par le carré d'un facteur linéaire, ou pour que $F(t)$ soit le carré d'un polynôme du second degré?

IV. On remplace, dans la question précédente, la courbe (C) par la courbe gauche (Γ) définie en axes rectangulaires par les équations

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x = at^3 - bt^2 - x_0 t, \\ y = a't^3 + b't^2 - y_0 t, \\ z = a''t^3 + b''t^2 - z_0 t; \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées d'un point M_0 .

On représente encore par $\sqrt{F(t)} dt$ la différentielle de l'arc de la courbe (Γ).

Démontrer que $F(t)$ n'est le produit d'un polynôme du second degré par le carré d'une fonction linéaire, que si M_0 est sur une parabole (Π) et que, dans ce cas, la courbe (Γ) est une courbe plane.

Démontrer que, si $F(t)$ est le carré d'un polynôme du second degré, le point M_0 est sur une parabole (Π') et que la courbe (Γ) est alors une hélice.

On vérifiera que les plans de (II) et de (II') sont rectangulaires et l'on calculera les coordonnées de leurs sommets et de leurs foyers.

V. Les deux points M_0 et ω étant reliés par la correspondance précitée (voir II), si le premier décrit une courbe (Q), le second se déplace sur une courbe (ϖ) . On demande de choisir (Q) de telle sorte que les tangentes à ces deux courbes, aux points associés M_0 et ω , soient parallèles.

On déterminera l'enveloppe des courbes (Q) ainsi obtenues et celle des courbes (ϖ) correspondantes.

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Supposons d'abord

$$ab' - ba' \neq 0.$$

Il est commode, pour résoudre la question I qui a, presque tout entière, un caractère nettement projectif, de considérer en même temps que les points (x, y) ou (x_0, y_0) les points respectivement correspondants (X, Y) ou (X_0, Y_0) , dont les coordonnées, par rapport aux mêmes axes rectangulaires, sont définies par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = aX + bY, & x_0 = aX_0 + bY_0, \\ y = a'X + b'Y, & y_0 = a'X_0 + b'Y_0. \end{cases}$$

Ces formules définissent une transformation homographique très simple, conservant l'origine et la droite de l'infini. La courbe C est remplacée par une autre $\bar{C}$, admettant ou non un point de rebroussement, dans les mêmes conditions que C.

Le point M_0 est remplacé par un point $\bar{M}_0$ décrivant une parabole $\bar{P}$ et l'on remonte aisément à la figure pri-

mitive par les formules inverses

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{b'x - by}{ab' - ba'}, & X_0 = \frac{b'x_0 - by_0}{ab' - ba'}; \\ Y = \frac{-a'x + ay}{ab' - ba'}, & Y_0 = \frac{-a'x_0 + ay_0}{a'b' - ba}. \end{cases}$$

Les équations paramétriques de $\bar{C}$ sont, *sans avoir besoin de résoudre le moindre système linéaire*, évidemment

$$(\bar{C}) \quad X = t^3 - tX_0, \quad Y = t^2 - tY_0.$$

Pour que $\bar{C}$ (ou C) ait un point de rebroussement au point de paramètre θ il faut et il suffit que

$$(2) \quad X_0 = 3\theta^2, \quad Y_0 = 2\theta.$$

Ce sont les équations paramétriques de la parabole $\bar{P}$:

$$(2') \quad (\bar{P}) \quad 4X_0 = 3Y_0^2.$$

Le point de rebroussement (R_θ) a pour coordonnées

$$(3) \quad X_1 = -2\theta^3, \quad Y_1 = -\theta^2.$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe $(\bar{R})$:

$$(\bar{R}) \quad X_1^2 + 4Y_1^3 = 0.$$

Entre les coordonnées de $\bar{M}_\theta$ et $\bar{R}_\theta$ ont lieu les relations

$$(4) \quad \begin{cases} Y_1 = -\frac{X_0}{3}, & X_1 = -\frac{X_0Y_0}{3}, \\ X_0 = -3Y_1, & Y_0 = \frac{X_1}{Y_1} \end{cases}$$

qui définissent une *transformation quadratique birationnelle*.

Les courbes particulières $(\bar{C})$, (ou C), qui admettent un point de rebroussement, forment donc une famille à un paramètre (θ) défini par les équations paramétriques

$$(\bar{C}_\theta) \quad X = t^3 - 3\theta^2t, \quad Y = t^2 - 2\theta t.$$

Les paramètres directeurs X'_t, Y'_t de la tangente contiennent le facteur $t - \theta$, correspondant au point de rebroussement et entraînant la diminution d'une unité pour la classe de $\bar{C}_0$ relativement à la classe de la courbe $\bar{C}$ générale : la suppression de ce facteur permet de prendre pour paramètres, en un point quelconque

$$\left[\frac{3}{2}(t + \theta), 1 \right]$$

et, par suite, au point de rebroussement $(3\theta, 1)$: mais alors on constate que ce sont aussi les paramètres directeurs de la tangente à $\bar{R}$ au même point. Conclusion : *Le lieu du point de rebroussement, l'enveloppe de la tangente de rebroussement, l'enveloppe de la courbe $\bar{C}_0$ coïncident avec la courbe $(\bar{R})$. La correspondance par points $\bar{M}_0$ et $\bar{R}_0$ entre $(\bar{P})$ et $(\bar{R})$ a lieu, de plus, par tangentes parallèles.*

En revenant aux points ou courbes primitives, les mêmes propriétés ont lieu : les formules (1) donnent immédiatement les équations paramétriques de (P), (R) ou (C₁) et les formules (1') les équations explicites de ces courbes. Ceci nous permet d'ailleurs de résoudre l'unique partie de la question I qui n'a plus le caractère projectif.

La relation

$$ab + a'b' = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que l'enveloppe (R) soit la développée d'une parabole.

En effet, (R) a pour équations paramétriques

$$(R) \quad x = -2a\theta^3 - b\theta^2, \quad y = -2a'\theta^3 - b'\theta^2$$

et l'on calcule l'arc s par la formule

$$(5) \quad \frac{ds}{dt} = \theta \sqrt{(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2}.$$

On suppose $ab' - ba' \neq 0$: donc le trinôme en θ

sous le radical n'est pas carré parfait. Si l'on suppose $ab + a'b' = 0$, on a aussitôt

$$\begin{aligned} ds &= 3\sqrt{a^2 + a'^2} \sqrt{\theta^2 + \frac{b^2 + b'^2}{9(a^2 + a'^2)}} d(\theta^2), \\ s &= 2\sqrt{a^2 + a'^2} \left[\theta^2 + \frac{b^2 + b'^2}{9(a^2 + a'^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2[(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2]^{\frac{3}{2}}}{27(a^2 + a'^2)} \end{aligned}$$

et l'on constate sans peine que la courbe définie par les formules

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(3a\theta + b)}{27(a^2 + a'^2)} [(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2] - 2a\theta^3 - b\theta^2, \\ y &= \frac{2(3a'\theta + b')}{27(a^2 + a'^2)} [(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2] - 2a'\theta^3 - b'\theta^2 \end{aligned}$$

est une parabole et admet (R) comme développée.

Si $ab + a'b' = 0$, on voit aussi que la parabole P a son sommet à l'origine.

On constate aisément que l'intégrale

$$\int (u + \lambda) \sqrt{u^2 + \mu} du$$

n'est algébrique que si $\lambda\mu = 0$, de sorte que, sans insister davantage, on constate que la condition $ab + a'b' = 0$, démontrée *suffisante*, est aussi *nécessaire*. On peut d'ailleurs remarquer que si l'on fait tourner les axes Ox , Oy autour de l'origine, les quantités (x, y) , (a, a') , (b, b') , (x_0, y_0) sont soumises à la même transformation linéaire et homogène, de sorte que l'hypothèse $ab + a'b' = 0$ permet, par une rotation d'axes préliminaires, de supposer $b = 0$, $a' = 0$ sans diminuer la généralité; je n'insisterai pas davantage sur ce point et la liaison avec les transformations homographiques ou les coordonnées trilineaires.

Si l'on suppose $ab' - ba' = 0$, on écarte le cas où a, a' seraient nuls tous deux et où (C) se réduirait à une parabole; si donc $a \neq 0$, on peut écrire $b = ma, b' = ma'$, puis

$$(C) \quad x = at^3 + bt^2 - x_0 t, \quad y = mx - (y_0 - mx_0)t.$$

Si donc $y_0 - mx_0 = 0$, la courbe C se réduit à la droite $y - mx = 0$; si $y_0 - mx_0 \neq 0$, la courbe C admet un point de rebroussement *indépendant de x_0, y_0* , rejeté à l'infini dans la direction $(1, m)$; la tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

II et V. Opérons pour ces deux questions, uniquement avec les variables (X, Y) ou (X_0, Y_0) .

II. Le cas $ab' - ba' = 0$ est écarté. Les constantes a, b, a', b', x_0, y_0 sont supposées réelles. La cubique C, unicursale, admet un point double, unique, donc à *coordonnées toujours réelles, isolé ou non isolé, suivant que les valeurs du paramètre, t_1 et t_2 , qui leur correspondent sont imaginaires conjuguées ou réelles.*

Les équations $X(t_1) = X(t_2)$ et $Y(t_1) = Y(t_2)$ ayant été débarrassées du facteur $t_1 - t_2$, on a aisément

$$(1) \quad \begin{cases} t_1 + t_2 = Y_0 \\ t_1 t_2 = Y_0^2 - X_0 \end{cases} \quad t_1 - t_2 = \varepsilon \sqrt{4X_0 - 3Y_0^2}.$$

Pour que ω soit point double, non isolé, on a la condition

$$4X_0 - 3Y_0^2 \geq 0,$$

de sorte que la séparatrice est, comme juste, la parabole. $(\bar{P})$. Les coordonnées (X', Y') du point double ω sont

$$\frac{1}{2} [X(t_1) + X(t_2)], \quad \frac{1}{2} [Y(t_1) + Y(t_2)],$$

de sorte que l'on obtient aisément

$$(2) \quad X' = Y_0(X_0 - Y_0^2), \quad Y' = X_0 - Y_0^2,$$

d'où l'on déduit aisément

$$(2') \quad Y_0 = \frac{X'}{Y'}, \quad X_0 = Y' + \frac{X'^2}{Y'^2}.$$

Les formules (2), (2') définissent une transformation birationnelle entre les deux systèmes de variables (X_0, Y_0) et (X', Y') .

A un point $M_0(X_0, Y_0)$ correspond un seul point $\omega(X', Y')$ par les formules (2). Si X' et Y' ne sont pas nulles toutes deux, les formules (2') donnent inversement un point M_0 et un seul, correspondant à un point ω donné; mais si ω coïncide avec l'origine, les formules (2') deviennent illusoires et l'on s'aperçoit, par les formules (2), que les points correspondants M_0 sont répartis sur la parabole d'équation

$$(3) \quad X_0 - Y_0^2 = 0.$$

Si l'on étudie les formules (2), (2') du point de vue des transformations birationnelles, sans nous préoccuper davantage de la question qui les a introduites, on remarque que chaque droite de l'un des plans (X_0, Y_0) ou (X', Y') est transformée en cubique dans l'autre. Les formules de transformation peuvent s'écrire avec des coordonnées homogènes

$$(4) \quad \begin{cases} X_0 = X'^2 Z' + Y'^3, & Y_0 = X' Y' Z', & Z_0 = Y'^2 Z', \\ (4') \quad \begin{cases} X' = Y_0(X_0 Z_0 - Y_0^2), & Y' = (X_0 Z_0 - Y_0^2) Z_0, & Z' = Z_0^3, \end{cases} \end{cases}$$

Les points fondamentaux du plan (X_0, Y_0) se réduisent à l'unique point à l'infini sur l'axe des X_0 ; les formules (2) montrent que, pour X_0 infini et Y_0 fini, le point (X', Y') est rejeté à l'infini dans la direction $(Y_0, 1)$ de sorte qu'au point à l'infini de l'axe des X_0 correspond toute la droite de l'infini du plan (X', Y') ; c'est ici qu'apparaît l'utilité des formules homo-

gènes (4), (4'). Servons-nous en effet de ces dernières : nous voyons qu'au point $Y_0 = Z_0 = 0$ (point à l'infini de l'axe des X_0) correspond, soit $Z' = 0$, et c'est ce qui vient d'être étudié (X_0 devenant infini et Y_0 restant fini, si l'on emploie les coordonnées non homogènes), soit $Y' = 0$; d'après ce qui vient d'être dit, il est nécessaire dans cette dernière hypothèse que les coordonnées non homogènes X_0, Y_0 deviennent infinies toutes deux, de façon que la différence $Y_0^2 - X_0$ tende vers zéro (branche parabolique dans la direction de l'axe des X_0); par exemple, si le point (X_0, Y_0) décrit la courbe

$$X_0 = Y_0^2 + \frac{k}{Y_0},$$

où k est une constante numérique, les coordonnées non homogènes X' et Y' tendent respectivement vers k et 0, quand Y_0 devient infini et l'on obtient ainsi, en faisant varier k , tous les points de la droite $Y' = 0$: on a donc deux droites et non une, correspondant au point à l'infini de l'axe X_0 .

Les points fondamentaux du plan (X', Y') sont l'origine, à laquelle correspond toute la parabole $X_0 - Y_0^2 = 0$, puis le point à l'infini sur l'axe X' . Si l'on se donne un chemin *déterminé* arrivant à l'origine $X' = Y' = 0$ avec une tangente *bien déterminée* de pente m , on a le point $X_0 = m^2, Y_0 = m$ susceptible de parcourir toute la parabole $X_0 - Y_0^2 = 0$. Si l'on donne, en coordonnées non homogènes, à X' une valeur infinie et à Y' une valeur finie, X_0 et Y_0 sont infinis de sorte que $\frac{Y_0}{X_0}$ soit nul : on a donc le point à l'infini de l'axe X_0 ; si l'on fait grandir X' et Y' indéfiniment de façon que le rapport $\frac{Y'}{X'}$ tende vers zéro, le point (X', Y') s'éloigne à l'infini dans la direction de l'axe des X' , les quantités X_0 et Y_0 augmentent indéfi-

niment et l'on a

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{Y'^3 + X'^2}{Y'X'}.$$

Si donc on fait parcourir au point (X', Y') la courbe d'équation

$$Y'^3 + X'^2 = m Y'X',$$

où m est une constante, le point (X_0, Y_0) décrit la droite de pente $\frac{1}{m}$ issu de l'origine et quand le point (X', Y') s'éloigne à l'infini sur cette courbe, le point (X_0, Y_0) s'éloigne aussi à l'infini sur la droite en jeu: donc au point à l'infini de l'axe X' correspond la droite de l'infini du plan X_0, Y_0 .

V. Pour ne pas rompre le cours des idées, traitons maintenant V. Rappelons que $\bar{M}_0$ a pour coordonnées (X_0, Y_0) et $\omega(X', Y')$ avec les formules

$$(T) \quad \begin{cases} X' = Y_0(X_0 - Y_0^2), & Y' = X_0 - Y_0^2, \\ Y_0 = \frac{X'}{Y'}, & X_0 = Y' + \frac{X'^2}{Y'^2}. \end{cases}$$

Quand le point $\bar{M}_0$ vient de la parabole P , le point ω vient en un point $\bar{R}_0$ de $(\bar{R})$, la courbe $\bar{C}$ ayant un rebroussement en $\bar{R}_0$ et nous avons remarqué que les tangentes en $\bar{M}_0$ et $\bar{R}_0$ aux deux courbes $(\bar{P})$ et $(\bar{R})$ sont parallèles: ces deux courbes se correspondent dans la transformation birationnelle actuelle; nous avons vu plus haut que $(\bar{P})$ et $(\bar{R})$ se correspondent aussi dans une autre transformation birationnelle, mais quadratique.

La transformation (T) remplace une courbe *quelconque* de l'un des plans, de degré m , par une courbe de degré $3m$ de l'autre plan, admettant les points fondamentaux de ce plan avec un certain degré de multiplicité; si la courbe à transformer, au lieu d'être *quel-*

conque, passe par les points fondamentaux, le degré de la courbe correspondante s'abaisse. Pour que les tangentes aux points homologues de deux courbes transformées soient parallèles, il faut que l'on ait *constamment* sur ces deux courbes

$$(1) \quad \frac{dY'}{dX'} = \frac{dY_0}{dX_0}.$$

Ceci donne, en conservant les variables X_0, Y_0 ,

$$(2) \quad dX_0^2 - 3Y_0 dY_0 dX_0 + (3Y_0^2 - X_0) dY_0^2 = 0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à laquelle doit satisfaire la courbe (Q) décrite par le point M_0 . Cette équation prend immédiatement, en la résolvant par rapport à $\frac{dX_0}{dY_0}$, la forme

$$(3) \quad \frac{dX_0 - \frac{3}{2} Y_0 dY_0}{\sqrt{X_0 - \frac{3}{4} Y_0^2}} = \pm dY_0$$

manifestement intégrable : on obtient ainsi la famille de paraboles

$$(4) \quad 3X_0 - 3Y_0^2 = (Y_0 - h)^2,$$

où h est une constante ; toutes ces paraboles ont même direction d'axe que $\bar{P}$ et lui sont bitangentes aux points où la droite $Y_0 = h$ rencontre $\bar{P}$; donc l'enveloppe des courbes (Q) particulières est précisément $\bar{P}$. Donc dans le plan (X', Y') les courbes (ϖ) ont pour enveloppe la courbe $(\bar{R})$. Avec les formules (T) on a immédiatement l'équation des courbes ϖ :

$$X'^2 + 4Y'^3 = (X' - hY')^2$$

et l'on voit bien que les cubiques ainsi obtenues ont la courbe $(\bar{R})$ pour enveloppe.

III. On a

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv (3at^2 + 2bt - x_0)^2 + (3a't^2 + 2b't - y_0)^2 \\ &\equiv [3at^2 + 2bt - x_0 + i(3a't^2 + 2b't - y_0)] \\ &\quad \times [3at^2 + 2bt - x_0 - i(3a't^2 + 2b't - y_0)]. \end{aligned}$$

Pour que $F(t)$ ait *une seule racine double*, il est nécessaire et suffisant que l'une des trois hypothèses suivantes ait lieu :

$$\begin{aligned} (a) \quad & 3(a + ia')(x_0 + iy_0) + (b + ib')^2 = 0, \\ (b) \quad & 3(a - ia')(x_0 - iy_0) + (b - ib')^2 = 0, \\ (c) \quad & x_0 = 3a\theta^2 + 2b\theta, \quad y_0 = 3a'\theta^2 + 2b'\theta. \end{aligned}$$

Cette dernière exprime que le point M_0 appartient à la courbe (R) déjà étudiée. On a donc, dans ce cas,

$$(1) \quad \frac{ds}{dt} = (t - \theta) \sqrt{[3a(t + \theta) + 2b]^2 + [3a'(t + \theta) + 2b']^2}$$

L'arc s s'obtient alors par une combinaison de fonctions rationnelles et logarithmiques en t ; le trinôme en $(t + \theta)$ sous le radical n'est pas carré parfait, puisque $ab' - ba'$ est supposé non nul; pour que l'arc s soit algébrique, il faut et suffit que $t = \theta$ soit racine de la dérivée du trinôme en t placé sous le radical, d'où

$$\theta = - \frac{ab + a'b'}{3(a^2 + a'^2)}$$

et alors la courbe (C_θ) correspondante, non seulement admet le point, $t = \theta$, comme point de rebroussement, mais est une développée de parabole. La valeur de θ obtenue correspond au sommet de la parabole P.

Si l'hypothèse (a) ou (b) est réalisée, à l'exclusion de l'autre, la courbe (C) est imaginaire.

Pour que $F(t)$ ait *deux racines doubles*, il faut, ou bien que les deux facteurs de $F(t)$ soient proportion-

nels, d'où $ab' - ba' = 0$ et $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, c'est le cas où (C) se réduit à une droite, ou bien que chaque facteur soit carré parfait, autrement dit (a) et (b) sont réalisées simultanément. Mais alors si l'on considère la parabole (P) déjà rencontrée

$$(2) \quad x = 3at^2 + 2bt, \quad y = 3a't^2 + 2b't,$$

cela exprime purement et simplement que la distance

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

d'un point *variable* t de cette parabole au point *fixe* (x_0, y_0) s'exprime rationnellement en t ou, si l'on préfère, au moyen des coordonnées (x, y) du point de P; le point (x_0, y_0) est donc le foyer de P. Les coordonnées (x_0, y_0) de ce foyer F et le paramètre p se déterminent aisément grâce à cette remarque. En effet (a) et (b) réunies donnent

$$(3) \quad \begin{cases} 3(ax_0 - a'y_0) + b^2 - b'^2 = 0, \\ 3(a'x_0 + ay_0) - 2bb' = 0; \end{cases}$$

d'où pour le foyer F

$$(4) \quad x_0 = \frac{a(b'^2 - b^2) - 2a'bb'}{3(a^2 + a'^2)}, \quad y_0 = \frac{a'(b^2 - b'^2) - 2abb'}{3(a^2 + a'^2)},$$

puis

$$\begin{aligned} (5) \quad F(t) &\equiv \frac{[3(a + ia')t + (b + ib')]^2 [3(a - ia')t + (b - ib')]^2}{9(a^2 + a'^2)} \\ &\equiv \frac{[(3at + b)^2 + (3a't + b')^2]^2}{9(a^2 + a'^2)} \\ &\equiv \frac{[3ax + 3a'y + b^2 + b'^2]^2}{9(a^2 + a'^2)}. \end{aligned}$$

La directrice a donc pour équation

$$(6) \quad 3ax + 3a'y + b^2 + b'^2 = 0.$$

La distance du foyer F à la directrice, ou p , se calcule aisément :

$$(7) \quad p = \frac{2(ab' - ba')^2}{3(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. On a cette fois

$$(1) \quad F(t) \equiv (3at^2 + 2bt - x_0)^2 + (3a't^2 + 2b't - y_0)^2 \\ + (3a''t^2 + 2b''t - z_0)^2.$$

Pour que $F(t)$ ait *une seule racine double*, il suffit de l'identifier avec

$$(t^2 - 2\theta t + \theta^2) \left[9(a^2 + a'^2 + a''^2)t^2 + \lambda t + \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\theta^2} \right]$$

et les relations obtenues en égalant les termes en t^3 , t^2 et t permettent, par l'élimination de λ et θ , d'obtenir une équation unique entre x_0 , y_0 , z_0 de sorte que le point M_0 décrit une *surface*, d'ailleurs tout entière imaginaire, possédant une *ligne double réelle, mais isolée*; cette ligne est celle que l'énoncé demande; on l'obtient en exprimant que le facteur $t - \theta$ appartient à chacun des trois trinômes qui figurent dans $F(t)$. On a ainsi

$$(II) \quad x_0 = 3a\theta^2 + 2b\theta, \quad y_0 = 3a'\theta^2 + 2b'\theta, \quad z_0 = 3a''\theta^2 + 2b''\theta, \\ F(t) \equiv (t - \theta)^2 \{ [3a(t + \theta) + 2b]^2 \\ + [3a'(t + \theta) + 2b']^2 + [3a''(t + \theta) + 2b'']^2 \}.$$

Le point M_0 décrit alors une parabole (II); la courbe Γ_θ a pour équations paramétriques

$$(\Gamma_\theta) \quad \begin{cases} x = a(t^3 - 3\theta^2 t) + b(t^2 - 2\theta t), \\ y = a'(t^3 - 3\theta^2 t) + b'(t^2 - 2\theta t), \\ z = a''(t^3 - 3\theta^2 t) + b''(t^2 - 2\theta t). \end{cases}$$

Les deux courbes (II) et (Γ_θ) sont donc dans le plan

d'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x & a & b' \\ y & a' & b' \\ z & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe (Γ_0) correspond par *affinité* à la courbe

$$(\overline{C}_0) \quad X = t^3 - 3\theta^2 t, \quad Y = t^2 - 2\theta t$$

déjà rencontrée, qui a un point de rebroussement pour $t = \theta$.

On peut remarquer que, si l'on effectue une transformation de coordonnées en passant du système rectangulaire $Oxyz$ à un autre système, rectangulaire ou non, $OXYZ$ de même origine, les quantités (x, y, z) , (a, a', a'') , (b, b', b'') , (x_0, y_0, z_0) subissent la même transformation et l'on peut dire que c'est cette simple remarque qui domine la solution actuelle. Si donc le déterminant Δ

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, on peut réduire les équations de Γ à la forme simple

$$(3) \quad X = t^3, \quad Y = t^2, \quad Z = -t$$

par *affinité*. Si le déterminant $\Delta = 0$, on peut par une transformation d'axes rectangulaires réduire les équations de Γ à la forme

$$(4) \quad \begin{cases} x = at^3 + bt^2 - x_0 t, \\ y = a' t^3 + b' t^2 - y_0 t, \\ z = 0 \end{cases}$$

et nous voyons bien que Π et Γ_0 jouent alors l'une par rapport à l'autre le rôle de P et C_0 précédemment.

Si $F(t)$ est le carré d'un trinôme de second degré, le point x_0, y_0, z_0 coïncide, pour la raison déjà donnée au paragraphe précédent, avec l'un des foyers de la parabole (Π) déjà rencontrée

$$(\Pi) \quad x = 3at^2 + 2bt, \quad y = 3a't^2 + 2b't, \quad z = 3a''t^2 + 2b''t,$$

de sorte que le point M_0 décrit la parabole (Π') focale de (Π) . La tangente au point t de (Γ) a pour paramètres directeurs

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0$$

[x, y, z désignant le point de (Π) correspondant au même t que le point de (Γ)].

Elle est donc parallèle successivement aux diverses génératrices du cône de sommet (x_0, y_0, z_0) s'appuyant sur (Π) ; ce cône est de révolution, donc (Γ) est une hélice.

Pour traiter la question sans calculs fastidieux ou inélégants, calculons d'abord les coordonnées du sommet de (Π) . L'axe a pour paramètres directeurs (a, a', a'') ; la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe, d'où pour le t_1 du sommet

$$(3at_1 + b)a + (3a't_1 + b')a' + (3a''t_1 + b'')a'' = 0$$

ou

$$(5) \quad t_1 = -\frac{ab + a'b' + a''b''}{3(a^2 + a'^2 + a''^2)}.$$

Si l'on pose

$$(6) \quad t = \bar{t} - \frac{ab + a'b' + a''b''}{3(a^2 + a'^2 + a''^2)}$$

et si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au sommet, on a, en appelant x_1, y_1, z_1 les coordon-

nées du sommet S de (Π)

$$(7) \quad \begin{cases} x = x_1 + \bar{x}, & y = y_1 + \bar{y}, & z = z_1 + \bar{z}; \\ x_0 = x_1 + \bar{x}_0, & y_0 = y_1 + \bar{y}_0, & z_0 = z_1 + \bar{z}_0; \\ \bar{x} = 3a\bar{t}^2 + 2\bar{b}\bar{t}, & \bar{y} = 3a'\bar{t}^2 + 2\bar{b}'\bar{t}, & \bar{z} = 3a''\bar{t}^2 + 2\bar{b}''\bar{t}; \\ \bar{b} = 3at_1 + b, & \bar{b}' = 3a't_1 + b', & \bar{b}'' = 3a''t_1 + b''; \end{cases}$$

$$(8) \quad F(t) = S(x - x_0)^2 = S(\bar{x} - \bar{x}_0)^2.$$

Faisons maintenant une rotation des axes autour de S en prenant pour axes nouveaux SX, SY, SZ les droites qui ont pour cosinus directeurs dans les anciens axes

$$\begin{aligned} (SX) & \quad \frac{a}{\sqrt{Sa^2}}, & \frac{a'}{\sqrt{Sa'^2}}, & \frac{a''}{\sqrt{Sa''^2}}; \\ (SY) & \quad \frac{bSa^2 - aSab}{\sqrt{Sa^2}\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, & \frac{b'Sa^2 - a'Sab}{\sqrt{Sa^2}\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, & \frac{b''Sa^2 - a''Sab}{\sqrt{Sa^2}\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}; \\ (SZ) & \quad \frac{a'b'' - b'a''}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, & \frac{a''b - b'a}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, & \frac{ab' - ba'}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}. \end{aligned}$$

On s'est servi de ce fait que les matrices

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ \bar{b} & \bar{b}' & \bar{b}'' \end{vmatrix}$$

donnent les mêmes mineurs, et des formules

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{b} = \frac{bSa^2 - aSab}{Sa^2}, & \bar{b}' = \frac{b'Sa^2 - a'Sab}{Sa'^2}, \\ \bar{b}'' = \frac{b''Sa^2 - a''Sab}{Sa''^2}. \end{cases}$$

On aura, en posant

$$(10) \quad A = \sqrt{Sa^2}, \quad B = \sqrt{S\bar{b}^2} = \frac{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}{\sqrt{Sa^2}},$$

comme équations paramétriques de (Π)

$$(II) \quad X = 3A \bar{t}^2, \quad Y = 2B \bar{t}, \quad Z = 0;$$

$$(11) \quad F(t) \equiv (3A \bar{t}^2 - X_0)^2 + (2B \bar{t} - Y_0)^2 + Z_0^2 \\ \equiv 9A^2 \bar{t}^4 - (6AX_0 - 4B^2) \bar{t}^2 - 4BY_0 \bar{t} + X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2.$$

Si $F(t)$ est carré parfait, on a nécessairement

$$(12) \quad \begin{cases} Y_0 = 0, \\ F(t) \equiv \left[3A \bar{t}^2 - \left(X_0 - \frac{2B^2}{3A} \right) \right]^2. \end{cases}$$

On a donc pour le lieu du point M_0 la parabole (Π') :

$$(\Pi') \quad X_0^2 + Z_0^2 = \left(X_0 - \frac{2B^2}{3A} \right)^2, \quad Y_0 = 0.$$

Le foyer de (Π') est le point S ; le foyer de (Π) est le sommet de (Π') , $\left(X = \frac{B^2}{3A}, Y = Z = 0 \right)$. La directrice de (Π') est la droite d'équations $Y = 0, X = \frac{2B^2}{3A}$.

On a pour équations de Γ

$$X = A \bar{t}^3 - X_0 \bar{t}, \quad Y = B \bar{t}^2, \quad Z = -Z_0 \bar{t}; \\ \frac{ds}{dt} = 3A \bar{t}^2 - \left(X_0 - \frac{2B^2}{3A} \right),$$

formules où l'on doit remplacer X_0 par son expression

$$X_0 = -\frac{3AZ_0^2}{4B^2} + \frac{B^2}{3A}.$$

On remonte aisément aux axes primitifs par les formules

$$x = x_1 + \frac{aX}{A} + \frac{\bar{b}Y}{B} - \frac{a'b'' - b'a''}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}} Z, \\ y_1 = \dots\dots\dots, \\ z_1 = \dots\dots\dots.$$

Je n'achève pas les calculs qui maintenant n'offrent

plus de difficulté, je signale simplement la formule

$$p = \frac{2}{3} \frac{(a'b'' - b'a'')^2 + (a'b - b'a)^2 + (ab' - ba')^2}{(a^2 + a'^2 + a''^2)^{\frac{3}{2}}}$$

qui donne le paramètre commun de (Π) et (Π') .