

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 117-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__117_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1^o *Intégrer le système d'équations différentielles :*

$$\frac{dy}{dt} - 4x + 4a \cos 2t = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + 4y - 4a \sin 2t = 0.$$

2° Trouver le système de solution tel que

$$x = a, \quad y = 0 \quad (\text{pour } t = 0).$$

3° Cette solution représente les équations paramétriques d'une courbe; former l'équation de sa tangente.

4° Conditions pour que deux tangentes soient perpendiculaires. Montrer qu'il y a trois tangentes perpendiculaires à une tangente donnée.

5° Lieu des points d'intersection de deux tangentes perpendiculaires. Montrer qu'il est formé de deux courbes distinctes.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION :

$$1^{\circ} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 2a \cos 2t.$$

$$x = C \cos 4t + C' \sin 4t + 2a \cos 2t,$$

$$y = a \sin 2t - \frac{1}{4} \frac{dx}{dt} = C \sin 4t - C' \cos 4t + 2a \sin 2t.$$

$$2^{\circ} \quad C = -a, \quad C' = 0.$$

$$x = a(2 \cos 2t - \cos 4t) = a + 2a(1 - \cos 2t) \cos 2t,$$

$$y = a(2 \sin 2t - \sin 4t) = 2a(1 - \cos 2t) \sin 2t.$$

Si l'on transporte l'origine au point $(a, 0)$, on a, en coordonnées polaires :

$$\theta = 2t, \quad \rho = 2a(1 - \cos \theta);$$

cardioïde, conchoïde du cercle

$$\rho = -2a \cos \theta.$$

$$3^{\circ} \quad x' = 4a(\sin 4t - \sin 2t) = 8a \sin t \cos 3t,$$

$$y' = 4a(\cos 2t - \cos 4t) = 8a \sin t \sin 3t;$$

tangente :

$$X \sin 3t - Y \cos 3t = x \sin 3t - y \cos 3t = 3a \sin t.$$

4° Deux tangentes sont perpendiculaires si

$$\tan 3t \tan 3t' = -1, \quad \cos 3(t' - t) = 0,$$

$$t' - t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

Mais t et $t + \pi$ donnent le même point (x, y) . Trois solutions distinctes :

$$t' = t \pm \frac{\pi}{6}, \quad t' = t + \frac{\pi}{2}.$$

5° Intersection de deux tangentes :

$$x \sin 3(t' - t) = 3a \sin(t' - t) [1 + 4 \sin t \sin t' \cos(t' + t)],$$

$$y \sin 3(t' - t) = 12a \sin(t' - t) \sin t \sin t' \sin(t' + t).$$

$$\text{Si } t' = t + \frac{\pi}{2},$$

$$x = -3a + 6a \sin^2 2t = -3a \cos 4t,$$

$$y = 6a \sin 2t \cos 2t = 3a \sin 4t$$

(cercle).

$$\text{Si } t' = t \pm \frac{\pi}{6}, \text{ soit } t' + t = \theta,$$

$$x = \frac{3}{2}a(1 + \sqrt{3} \cos \theta - 2 \cos^2 \theta),$$

$$y = \frac{3}{2}a(\sqrt{3} - 2 \cos \theta) \sin \theta.$$

Si l'on transporte l'origine au point $(\frac{3}{2}a, 0)$, on a, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{3}{2}a[\sqrt{3} - 2 \cos \theta].$$

Limaçon de Pascal, conchoïde du cercle

$$\rho = -3a \cos \theta.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y' \cos x + 3y \sin x = 4 \sin x + 2 \sin^3 x.$$

1° *Montrer que toutes les courbes intégrales passent par des points fixes, et ont, en ces points, leur centre de courbure fixe*

2° *Trouver l'intégrale particulière qui prend la valeur $y = 1$, pour $x = \pi$. Construire la courbe représentative.*

3° *Calculer l'abscisse positive du premier point de rencontre de cette courbe avec Ox .*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION :

$$y = 2 \sin^2 x + C \cos^3 x.$$

1° Cette courbe passe par les points (indépendants de C) :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y = 2, \quad y' = 0, \quad y'' = -4;$$

centre de courbure :

$$X = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''} = x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{7}{4}.$$

$$2^\circ \quad C = -1, \quad y = 2 - 2 \cos^2 x - \cos^3 x, \\ y' = \sin x \cos x (4 + 3 \cos x).$$

Les droites $x = k\pi$ sont des axes de symétrie. Aux points

$(0, -1)$, $(\frac{\pi}{2}, 2)$, $(\pi, 1)$, la tangente est parallèle à Ox .

$$3^\circ \quad \cos x = X; \quad f(X) = X^3 + 2X^2 - 2 = 0.$$

X a une seule valeur réelle, positive, entre 0 et 1 :

$$f'(X) = 3X^2 + 4X, \quad f''(X) = 6X + 4.$$

La méthode de Newton donne :

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 7, \quad f''(1) = 10;$$

$$-h = \frac{f}{f'} = \frac{1}{7} = 0,142, \quad \frac{h^2}{2} \frac{f''}{f'} = 0,014;$$

$$X = 1 - 0,14 = 0,86 \quad (\text{approximation } 0,01);$$

$$f(0,85) = 0,059125, \quad f'(0,85) = 5,5675,$$

$$f''(0,85) = 9,1;$$

$$-h = \frac{f}{f'} = 0,01062, \quad \frac{h^2}{2} \frac{f''}{f'} = 0,000092;$$

$$X = \cos x = 0,85 - 0,0107 = 0,8393;$$

$$x = 32^\circ 56' = 0,575.$$

(Marseille, juin 1924.)

