Nouvelles annales de mathématiques

J. Haag

Sur une certaine loi de force comprenant comme cas particulier la loi de gravitation einsteinienne

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 61-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__61_1>

[R7b]

SUR UNE CERTAINE LOI DE FORCE COMPRENANT COMME CAS PARTICULIER LA LOI DE GRAVITATION EINSTEINIENNE;

PAR J. HAAG.

1. Soit un point M, de masse 1, soumis aux deux forces suivantes :

1° *Une force centrale*

$$F_1 = F + v^2(A_1 + A_2 \cos^2 i);$$

2° *Une force tangente à la trajectoire*

$$F_2 = A_3 v^2 \cos i.$$

Dans ces formules, F, A_1, A_2, A_3 sont des fonctions du rayon vecteur $r = \text{OM}$; v est la vitesse et i l'angle de cette vitesse avec OM.

Nous appellerons *forces perturbatrices* les forces autres que F.

On peut déterminer le mouvement du point M *par des quadratures*. D'abord, sa trajectoire est dans un plan passant par O, car le plan osculateur à cette ligne passe constamment par ce point fixe. Prenons, dans ce plan, un système de coordonnées polaires, de pôle O. Soient σ le moment cinétique par rapport à O et p la distance du pôle à la tangente à la trajectoire. On a

$$\sigma = vp.$$

D'autre part,

$$\frac{d\sigma}{dt} = F_2 p;$$

d'où

$$d \log \sigma = \frac{F_2}{v} dt = A_3 v \cos i \, dt = A_3 \, dr,$$

$$\log \sigma = \int A_3 \, dr.$$

Pour la commodité de l'écriture, posons

$$(1) \qquad \int A_3 \, dr = A, \qquad A_3 = \frac{dA}{dr}.$$

Nous avons

$$(2) \qquad \sigma = r^2 \frac{d\theta}{dt} = ke^A \qquad (k = \text{const.}),$$

équation qui généralise *l'intégrale des aires* de la théorie des forces centrales.

Appliquons maintenant le théorème des forces vives. Nous avons

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = F_1 \, dr + F_2 v \, dt = (F_1 + A_3 v^2) \, dr$$

ou, en remarquant que

$$v^2 \cos^2 i = v^2 - \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = v^2 - \frac{k^2 e^{2A}}{r^2},$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dr} = F - \frac{A_2 k^2 e^{2A}}{r^2} + v^2 (A_1 + A_2 + A_3),$$

équation différentielle linéaire du premier ordre en v^2, qui nous donnerait, par deux quadratures, v en fonction de r. On aurait ensuite, par la méthode classique des forces centrales, θ et t par deux nouvelles quadratures.

2. Cherchons *l'équation de la trajectoire.*

Posons $r = \frac{1}{u}$ et calculons la quantité

(4) $$x = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2.$$

on a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2} k^2 e^{2A} = x k^2 e^{2A}.$$

Portons dans (3) :

$$-\frac{1}{2} u^2 k^2 e^{2A} \left(\frac{dx}{du} + 2x \frac{dA}{du}\right)$$
$$= F - A_2 k^2 u^2 e^{\prime A} + x k^2 e^{2A} (A_1 + A_2 + A_3),$$

ou, en remarquant que

$$u^2 \frac{dA}{du} = -\frac{dA}{dr} = -A_3,$$
$$-\frac{1}{2} u^2 \frac{dx}{du} = x(A_1 + A_2) - A_2 u^2 + \frac{F}{k^2} e^{-2A},$$

posons

(5) $$2\int (A_1 + A_2)\, dr = B;$$

notre équation devient

(6) $$\frac{dx}{du} - x\frac{dB}{du} = 2 A_2 - 2 \frac{F}{k^2 u^2} e^{-2A},$$

dont l'intégrale générale est

(7) $$x = e^B \left[h + 2\int \left(e^{-B} A_2 - \frac{F}{k^2 u^2} e^{-B-2A}\right) du\right] \quad (h = \text{const.}).$$

Ayant x en fonction de u, l'équation (4) donnera θ par une quadrature. On peut aussi, en dérivant par rapport à θ, former l'équation du second ordre :

(8) $$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{2} \frac{dx}{du}.$$

Supposons que l'on connaisse la trajectoire et, par conséquent, x en fonction de u. On peut alors tirer de l'équation (6)

$$F = k^2 e^{2A} u^2 \left[A_2 + \frac{1}{2} x \frac{dB}{du} - \frac{1}{2} \frac{dx}{du} \right]$$

ou

$$(9) \qquad F = k^2 e^{2A} \left[u^2 \left(A_2 - \frac{1}{2} \frac{dx}{du} \right) - (A_1 + A_2) x \right].$$

Ceci peut être considéré comme une *généralisation de la formule de Binet*. Elle nous donne la force centrale F, connaissant la trajectoire et les forces perturbatrices, lesquelles peuvent être choisies arbitrairement. On voit qu'il y a une infinité de lois de force, de la nature présentement étudiée, qui permettent de réaliser une trajectoire quelconque donnée à l'avance.

Dans le cas particulier où les forces perturbatrices sont nulles, la formule (9) se réduit à

$$F = - k^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right),$$

ce qui est la classique formule de Binet.

3. Cherchons les *lois de force qui donnent lieu à la première loi de Képler*. Supposons qu'une trajectoire particulière soit une ellipse, de foyer O, définie par l'équation

$$(10) \qquad u = \frac{1 + e \cos\theta}{p}.$$

On a, dans cette hypothèse,

$$(11) \qquad x = - \frac{1 - e^2}{p^2} + \frac{2u}{p}$$

et, en portant dans (9),

$$(12) \quad F = k^2 e^{2A} \left[\left(A_2 - \frac{1}{p} \right) u^2 + \frac{A_1 + A_2}{p} \left(\frac{1 - e^2}{p} - 2u \right) \right].$$

Mais, F ne doit pas dépendre des constantes k, e, p. Donc le crochet du second membre doit être le produit d'une fonction de u par une fonction de e et de p. Or, il s'écrit

$$A_2 u^2 - \frac{B_1}{p} + \frac{1-e^2}{p^2} B_2,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(13) \qquad B_1 = u^2 + 2u(A_1 + A_2) \qquad B_2 = A_1 + A_2.$$

Il faut que B_1 et B_2 soient dans un rapport constant avec $A_2 u^2$, soit

$$B_1 = \lambda A_2 u^2, \qquad B_2 = \mu A_2 u^2 \qquad (\lambda,\ \mu = \text{const.}).$$

On tire de là

$$(14) \qquad A_1 = \frac{\mu u^2 - 1}{\lambda - 2\mu u}, \qquad A_2 = \frac{1}{\lambda - 2\mu u}.$$

Portant dans (12), il vient

$$(15) \quad F = \frac{k^2 e^{2A} u^2}{\lambda - 2\mu u}\left(1 - \frac{\lambda}{p} + \mu \frac{1-e^2}{p^2}\right) = \nu \frac{e^{2A}}{r(\lambda r - 2\mu)}$$
$$(\nu = \text{const}).$$

En prenant la dérivée logarithmique par rapport à r et se reportant à (1), ceci peut aussi s'écrire

$$(16) \qquad A_3 = \frac{F'}{2F} + \frac{\lambda r - \mu}{r(\lambda r - 2\mu)}.$$

On peut donc satisfaire à la première loi de Képler en prenant une force F *arbitraire, les forces perturbatrices étant ensuite données par* (14) *et* (16), où λ et μ sont des constantes quelconques.

Si l'on veut, en même temps, *vérifier la deuxième loi de Képler*, il faut que A soit nul; la formule (15) donne alors

$$(17) \qquad F = \frac{\nu}{r(\lambda r - 2\mu)}.$$

La force perturbatrice tangentielle est nulle; les autres sont toujours données par (14).

En particulier, *on doit retrouver la loi de Newton*. Effectivement, il suffit de supposer $\mu = 0$, $\lambda = \infty$, $\frac{\nu}{\lambda} = -m$.

4. Cherchons maintenant *quelles sont les lois de force qui donnent exactement les trajectoires d'Einstein*.

L'équation différentielle d'une telle trajectoire est, si l'on prend pour unités la vitesse de la lumière et la constante de la gravitation, de la forme suivante (¹)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2 - 1}{b^2} + \frac{2m}{b^2} u + 2mu^3,$$

où m désigne la masse attirante et a et b des constantes d'intégration. Avec nos notations, nous avons donc

$$x = \frac{a^2 - 1}{b^2} + \frac{2m}{b^2} u + 2mu^3.$$

Portant dans (9), il vient

$$\text{(18)} \qquad \mathrm{F} = k^2 e^{2\mathrm{A}} \left[u^2 \left(\mathrm{A}_2 - \frac{m}{b^2} - 3mu^2 \right) - (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) \left(\frac{a^2 - 1}{b^2} + \frac{2m}{b^2} u + 2mu^3 \right) \right].$$

Comme tout à l'heure, nous voulons que la loi de force soit indépendante des constantes d'intégration et le crochet doit être le produit d'une fonction de u par une fonction de a et de b. Posons, outre (13),

$$u^2(\mathrm{A}_2 - 3mu^2) - 2mu^3(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) = \mathrm{B}_3.$$

(¹) *Cf.* BECQUEREL, *Le principe de Relativité*, p. 232; Gauthier-Villars, 1922.

On a alors

$$F = k^2 e^{2A}\left(B_3 - \frac{m}{b^2} B_1 - \frac{a^2 - 1}{b^2} B_2\right)$$

et, comme tout à l'heure, il faut avoir des identités de la forme

$$B_1 = \lambda B_2, \qquad B_3 = \mu B_2;$$

λ et μ étant des constantes déterminées. On tire de là

$$(19) \qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{-\mu + u^2(1 - 3m\lambda) + 4mu^3}{\lambda - 2u}, \\[2ex] A_2 = \dfrac{\mu + 3m\lambda u^2 - 4mu^3}{\lambda - 2u}. \end{cases}$$

Puis,

$$(20) \qquad F = \nu \frac{e^{2A} u^2}{\lambda - 2u} = \nu \frac{e^{2A}}{r(\lambda r - 2)} \qquad (\nu = \text{const});$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(21) \qquad A_3 = \frac{F'}{2F} + \frac{\lambda r - 1}{r(\lambda r - 2)}.$$

Donc, *on peut réaliser l'ensemble des trajectoires d'Einstein en prenant une force F arbitraire, les forces perturbatrices étant ensuite définies par* (19) *et* (21).

Si l'on veut maintenant *que la loi du mouvement sur la trajectoire soit la même qu'avec la gravitation einsteinienne*, il faut avoir (*cf.* Becquerel, *loc. cit*, p. 230)

$$k e^{A} = \frac{b}{a}(1 - 2mu);$$

d'où, en portant dans (20) et changeant la constante ν,

$$F = \nu \frac{u^2(1 - 2mu)^2}{\lambda - 2u}.$$

Si, en particulier, on prend $\lambda = \frac{1}{m}$, $\mu = 0$, $\nu = -1$, on aboutit, en utilisant (19) et (21), à la loi de force

$$F_1 = -\frac{m}{r^2}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)+2v^2-r'^2\,\frac{3-4\dfrac{m}{r}}{1-2\dfrac{m}{r}}\right],$$

$$F_2 = \frac{2mvr'}{r^2\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)};$$

ce qui est exactement la loi de force correspondant à la gravitation einsteinienne. (*Cf.* CHAZY, *Comptes rendus*, 29 janvier 1923, page 285).

5. D'après ce qui précède, on voit qu'*il existe une infinité de lois de force permettant* de reproduire exactement la trajectoire d'Einstein et, par conséquent, *d'expliquer le mouvement du périhélie de Mercure.* Mais, si l'on s'impose seulement cette dernière condition, le problème admet encore beaucoup d'autres solutions.

Nous nous bornerons à chercher celles qui donnent une loi très voisine de celle de Newton.

Si nous considérons v^2 (carré du rapport de la vitesse du mobile à la vitesse de la lumière) comme infiniment petit du premier ordre, nous remarquons d'abord que mu est du même ordre, ainsi qu'il résulte de la deuxième équation intrinsèque du mouvement, écrite avec l'attraction newtonienne $-mu^2$. Toutes les forces perturbatrices doivent être de l'ordre de m^2u^3. Nous les réduirons d'ailleurs à leurs parties principales. Dès lors, nous pouvons poser

$$(22)\quad \begin{cases} F = -mu^2 + \alpha m^2 u^3, \\ A_1 = \beta\, mu^2, \qquad A_2 = \gamma\, mu^2, \qquad A_3 = \varepsilon\, mu^2, \end{cases}$$

α, β, γ, ε étant des nombres constants quelconques ([1]).

Nous allons maintenant calculer x par la formule (7), en négligeant les infiniment petits du second ordre. Nous avons d'abord, par la formule (1),

$$(23) \qquad A = \varepsilon m \int u^2\, dr = -\varepsilon m u;$$

puis, par la formule (5),

$$(24) \qquad B = -2(\beta + \gamma) m u.$$

Avant d'aller plus loin, cherchons la signification des constantes h et k. Si l'on admet la loi de Newton, l'équation (7) devient

$$x = h + \frac{2m}{k^2} u.$$

En comparant avec (11), on a

$$(25) \qquad h = -\frac{1-e^2}{p^2}, \qquad k^2 = mp.$$

Avec la loi actuelle, nous pouvons encore poser ces formules. Mais, bien entendu, p et e n'ont plus de signification géométrique simple, puisque la trajectoire n'est plus une conique. Toutefois, on peut dire que p est une longueur voisine du paramètre et e un nombre voisin de l'excentricité de la trajectoire newtonienne.

Portons (23), (24), (25) dans (7). Calculons d'abord la quantité sous le signe $\int$. Au second ordre près, elle

---

([1]) On pourrait supposer que ce sont des fonctions quelconques de u. Mais, si l'on admet que chacune de ces fonctions possède une dérivée finie et continue pour les petites valeurs de mu, on peut la réduire à la valeur qu'elle prend pour $mu = 0$, car l'erreur commise n'a qu'une répercussion du second ordre sur A_1, A_2, A_3, et du troisième ordre sur F.

s'écrit

$$\gamma m u^2 + \frac{1}{p}\left[1 + 2\left(\beta + \gamma + \varepsilon - \frac{\alpha}{2}\right) m u\right],$$

ce qui devient, en intégrant,

$$\frac{u}{p} + \left(\beta + \gamma + \varepsilon - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{m u^2}{p} + \frac{\gamma m u^3}{3}.$$

Dès lors,

$$x = \left[1 - 2(\beta + \gamma) m u\right]$$
$$\left[-\frac{1 - e^2}{p^2} + \frac{2u}{p} + 2\left(\beta + \gamma + \varepsilon - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{m u^2}{p} + \frac{2}{3}\gamma m u^3\right],$$

ou, en négligeant le second ordre,

$$x = -\frac{1 - e^2}{p^2} + \frac{2u}{p}\left[1 + \frac{m}{p}(1 - e^2)(\beta + \gamma)\right]$$
$$+ \frac{2 m u^2}{p}\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta - \gamma\right) + \frac{2}{3}\gamma m u^3.$$

Si l'on portait dans (4), on verrait que le calcul de θ en fonction de u se ramène à une intégrale elliptique. Mais, il est plus simple de porter dans (8). On obtient

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p}\left[1 + \frac{m}{p}(1 - e^2)(\beta + \gamma)\right]$$
$$+ \frac{2 m u}{p}\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta - \gamma\right) + \gamma m u^2.$$

Nous savons que l'intégrale cherchée est très voisine de $\frac{1 + e\cos\theta}{p}$. Dès lors, nous pouvons, en ne commettant qu'une erreur du second ordre, remplacer u par cette valeur au second membre. Celui-ci prend alors la forme

$$\frac{1}{p} + \frac{2 m e\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta\right)}{p^2}\cos\theta + \ldots,$$

les termes non écrits étant de la forme $a + b\cos 2\theta$, avec des coefficients a et b de l'ordre de $\frac{m}{p}\cdot$

Pour intégrer, on réduit successivement le second membre à chacun de ses termes et l'on cherche l'intégrale particulière correspondante. L'intégrale fournie par $a + b\cos 2\theta$ est $a - \frac{b}{3}\cos 2\theta$. Elle n'a qu'une répercussion négligeable sur l'intégrale générale, parce qu'elle est périodique et son effet ne s'accumule pas au cours des siècles. Au contraire, le terme en $\cos\theta$ donne l'intégrale particulière

$$\frac{me\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta\right)}{p^2}\theta \sin\theta,$$

qui finit par devenir appréciable pour les grandes valeurs de θ. Dès lors, l'équation approchée de la trajectoire s'écrit

$$u = \frac{1 + e\cos\theta}{p} + \frac{me\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta\right)}{p^2}\theta \sin\theta.$$

Elle peut, au second ordre près, se mettre sous la forme

$$u = \frac{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}{p},$$

en posant

$$(26) \qquad \theta_0 = \frac{m}{p}\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta\right)\theta.$$

Si l'on prend un nouvel axe polaire Ox', d'angle polaire θ_0, l'équation de la trajectoire rapportée à cet axe est

$$u = \frac{1 + e\cos\theta}{p}.$$

Elle représente une conique E'. Par rapport à l'ancien axe Ox, le mouvement résulte du mouvement sur E', combiné avec une rotation de E' autour de O, dont l'amplitude θ_0 est définie par la formule (26). C'est cette rotation qui constitue le *mouvement périhélique*. Dans la théorie d'Einstein, l'angle θ_0 est égal à $\frac{3m}{p}\theta$. Donc, pour que notre loi de force reproduise cette rotation, qui, comme on sait, est conforme à l'observation en ce qui concerne la planète Mercure, il faut et il suffit que l'on ait (¹)

$$\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta = 3. \tag{27}$$

Citons comme cas particuliers simples :

$$\alpha = -6, \qquad \varepsilon = \beta = \gamma = 0,$$

force centrale (²) $-\frac{m}{r^2}\left(1+\frac{6m}{r}\right)$;

$$\beta = -3, \qquad \alpha = \varepsilon = \gamma = 0,$$

force centrale (²) $-\frac{m}{r^2}\left(1+3v^2\right)$;

$$\varepsilon = 3, \qquad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

attraction newtonienne et force tangentielle $\frac{3mv^2\cos i}{r^2}$;

$$\varepsilon = -\beta = \frac{3}{2}; \qquad \alpha = \gamma = 0,$$

attraction newtonienne et force perturbatrice normale à la trajectoire, égale à (³) $\frac{3}{2}\frac{mv^2\sin i}{r^2}$.

(¹) Ce résultat a été indiqué par M. Chazy (*loc cit.*, p. 286), sous une forme à peine différente de celle-ci, que j'avais obtenue, de mon côté (abstraction faite du terme en α, que je n'avais pas considéré), avant d'avoir eu connaissance de sa communication.

(²) Signalé par M. Chazy.

(³) Signalé par M. Lecornu (*Comptes rendus*, 22 janvier 1923).

La loi du mouvement sur la trajectoire est donnée par (2), qui devient ici

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k\left(1 - \frac{\varepsilon m}{r}\right).$$

Si l'on veut avoir la deuxième loi de Képler, il faut que ε soit nul, la condition (27) devenant alors

$$\alpha + 2\beta + 6 = 0.$$

Si l'on veut avoir la même vitesse aréolaire qu'avec la loi d'Einstein, il faut prendre $\varepsilon = 2$; la condition (27) devient alors

$$\alpha + 2\beta + 2 = 0.$$