

RAOUL BRICARD

**Sur une configuration connue de dix droites**

*Nouvelles annales de mathématiques 5<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1923), p. 41-47

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1923\\_5\\_2\\_\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__41_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K' 13 a]

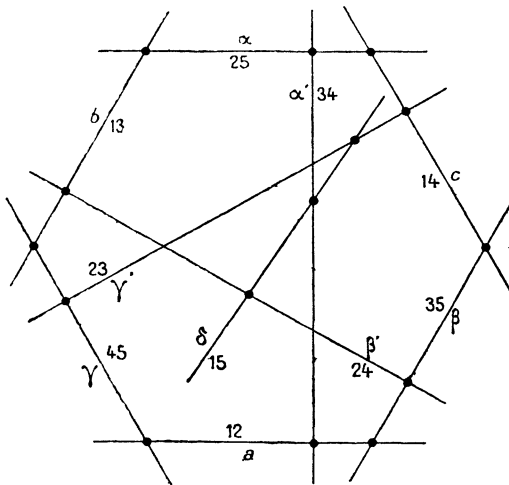
## SUR UNE CONFIGURATION CONNUE DE DIX DROITES ;

PAR RAOUL BRICARD.

I. Morley <sup>(1)</sup> et J. Petersen <sup>(2)</sup> ont fait connaître à peu près en même temps une configuration remarquable de dix droites, dont l'existence résulte du théorème suivant :

Soient données dans l'espace (fig. 1) trois droites

Fig. 1.



quelconques  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Construisons les perpendiculaires communes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  à ces droites prises deux

<sup>(1)</sup> *Proc. of the London Math. Soc.*, 1898, p. 670.

<sup>(2)</sup> *Mém. de l'Académie de Copenhague*, 1898.

à deux, puis la droite  $\alpha'$ , perpendiculaire commune à  $\alpha$  et  $a$  et les droites analogues  $\beta'$  et  $\gamma'$ .

Les droites  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  rencontrent à angle droit une même droite  $\delta$ .

On a une notation plus avantageuse en représentant les dix droites dont il est question dans cet énoncé par les combinaisons deux à deux de cinq symboles 1, 2, 3, 4, 5. Posons

$$\begin{aligned} a &= 12, & b &= 13, & c &= 14, \\ \alpha &= 25, & \beta &= 35, & \gamma &= 45, \\ \alpha' &= 34, & \beta' &= 24, & \gamma' &= 23, \\ & & \delta &= 15. \end{aligned}$$

On reconnaît que toute droite  $ij$  rencontre à angle droit les trois droites dont les symboles ne contiennent ni  $i$  ni  $j$ . Par exemple 12 rencontre à angle droit 34, 35 et 45. Les dix droites jouent le même rôle, ce qui vaut à leur système le nom de *configuration*, d'après le sens qu'on attache aujourd'hui à ce mot.

La démonstration de Morley est analytique. Je ne connais pas celle de Petersen. Je vais en donner une fort élémentaire, fondée sur des propriétés simples du déplacement fini d'un solide (1).

2. Rappelons qu'on appelle *renversement* la rotation d'un angle égal à  $\pi$  autour d'une droite (c'est-à-dire la symétrie par rapport à cette droite). Dans ce qui suit, un renversement d'axe  $X$  sera désigné par  $R(X)$ . Le produit de deux renversements  $R(X)$  et  $R(Y)$  est un *vissage* ou déplacement hélicoïdal dont l'axe est la

---

(1) Pour ces propriétés, voir par exemple : M. D'OCAGNE, *Cours de géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, p. 283 et suiv. ; R. BRICARD, *Cinématique et Mécanismes*, p. 13 et suiv.

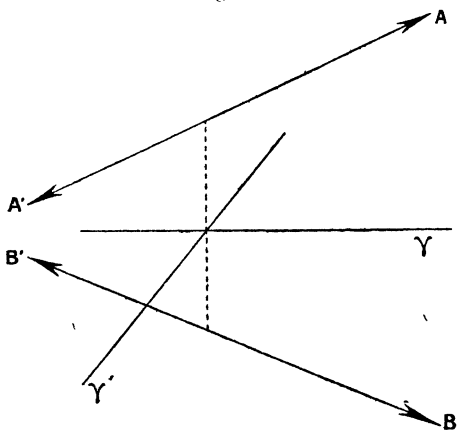
perpendiculaire commune à  $X$  et  $Y$ , dont la translation est le double de la distance de ces deux droites, dont l'angle de rotation est le double de leur angle. Un vissage  $V(Z)$  d'axe  $Z$  peut être considéré de  $\infty^2$  manières comme le produit de deux renversements. Si l'on a

$$V(Z) = R(X)R(Y) = R(X')R(Y'),$$

le système  $(X', Y')$  dérive du système  $(X, Y)$  par un vissage d'axe  $Z$  et d'ailleurs quelconque. Ce qu'il faut retenir par la suite, c'est que  $X, Y, X', Y'$  rencontrent à angle droit une même droite.

3. Soient  $A$  et  $B$  deux droites orientées quelconques,  $A'$  et  $B'$  les droites opposées (fig. 2). Par le milieu de

Fig. 2.



leur perpendiculaire commune menons la droite  $\gamma$ , bissectrice de l'angle formé par les parallèles à  $A$  et  $B$  menées de ce milieu (et orientées comme  $A$  et  $B$ ). Je dirai que  $\gamma$  est la *bissectrice intérieure* de  $A$  et  $B$  (ou

de  $A'$  et  $B'$ ) et la *bissectrice extérieure* de  $A$  et  $B'$  (ou de  $A'$  et  $B$ ).

La droite  $\gamma'$ , bissectrice extérieure de  $A$  et  $B$  et intérieure de  $A$  et  $B'$ , rencontre  $\gamma$  à angle droit.

$A$  et  $B$  sont symétriques par rapport à  $\gamma$ ,  $A$  et  $B'$  sont symétriques par rapport à  $\gamma'$ . Autrement dit, les renversements  $R(\gamma)$  et  $R(\gamma')$  amènent  $A$  à coïncider respectivement avec  $B$  et avec  $B'$ .

4. Soient maintenant  $A, B, C$  trois droites orientées quelconques, ayant pour opposées  $A', B', C'$ . Soient  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$  les bissectrices intérieures et extérieures des trois couples qu'elles forment ( $\alpha$  et  $\alpha'$  sont les bissectrices du couple  $B, C$ , etc.) <sup>(1)</sup>.

*Les trois droites  $\alpha, \beta, \gamma$  n'ont pas entre elles de relation intrinsèque; c'est-à-dire qu'on peut se les donner arbitrairement et trouver trois droites orientées  $A, B, C$  qui, prises deux à deux, les admettent pour bissectrices intérieures.*

Supposons en effet le problème résolu. Considérons le produit de renversements  $R(\alpha)R(\beta)R(\gamma)$ .  $R(\alpha)$  amène  $B$  sur  $C$ ,  $R(\beta)$  amène  $C$  sur  $A$ ,  $R(\gamma)$  amène  $A$  sur  $B$ . Donc le produit considéré laisse la droite orientée  $B$  en coïncidence avec elle-même (bien entendu, il n'en est pas nécessairement de même pour les *points* de cette droite). Par conséquent le vissage auquel ce produit est réductible, comme tout déplacement, a pour axe  $B$ , et l'on peut écrire

$$R(\alpha)R(\beta)R(\gamma) = V(B).$$

---

<sup>(1)</sup> Il convient d'observer que si  $A, B, C$  forment un triangle et si l'on oriente ces droites d'après l'un ou l'autre des sens de circulation sur ce triangle, les bissectrices que nous considérons ici comme *intérieures* sont celles que l'on appelle d'habitude *bissectrices extérieures*.

La méthode connue de composition des déplacements permet donc de trouver B. Cette droite est en général déterminée (à son orientation près). La connaissance de B entraîne immédiatement celle de C et A.

B ne serait indéterminée que si  $V(B)$  se réduisait à une translation. Il est aisé de reconnaître que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que  $\alpha, \beta, \gamma$  soient parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle. Je n'entrerai pas dans la discussion de ce cas singulier.

5. *Au contraire, les bissectrices extérieures  $\alpha', \beta', \gamma'$  ne peuvent être données arbitrairement.* — Considérons en effet le produit  $R(\alpha')R(\beta')R(\gamma')$ .  $R(\alpha')$  amène B sur  $C'$ ,  $R(\beta')$  amène  $C'$  sur A,  $R(\gamma')$  amène A sur  $B'$ . Donc le produit considéré amène B à coïncider avec la droite opposée  $B'$ . Si l'on suppose maintenant des points marqués sur B, il en existe un et un seul I qui vient coïncider avec lui-même. Le produit  $R(\alpha')R(\beta')R(\gamma')$  qui laisse ce point invariable est donc une *rotation* dont l'axe X passe par I. De plus, B venant sur  $B'$ , X doit être perpendiculaire à B, et l'angle de la rotation est égal à  $\pi$ . Cette rotation est donc un renversement, et l'on a

$$R(\alpha')R(\beta')R(\gamma') = R(X).$$

Multiplions à droite les deux membres de cette égalité par  $R(\gamma')$ . On a

$$[R(\gamma')]^2 = 1,$$

donc

$$R(\alpha')R(\beta') = R(X)R(\gamma').$$

Comme on l'a rappelé au n° 4, cela exige que les droites  $\alpha', \beta', \gamma'$  et X rencontrent à angle droit une même droite. On voit donc, en laissant de côté X, que :

*Les trois bissectrices extérieures  $\alpha', \beta', \gamma'$  doivent*

*rencontrer à angle droit une même droite (ce qui fait deux conditions).*

On reconnaît de même qu'une bissectrice extérieure et deux bissectrices intérieures, par exemple  $\alpha'$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , rencontrent à angle droit une même droite. En effet ces trois droites sont les bissectrices extérieures du système A', B, C.

6. Il suffit maintenant d'un mot pour démontrer le théorème du n° 1. Donnons-nous  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Les droites A, B, C, puis les droites  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  en résultent. Ces trois dernières droites rencontrent à angle droit une droite  $\delta$ . De même  $\alpha'$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  rencontrent à angle droit une droite  $a$ ;  $\alpha$ ,  $\beta'$  et  $\gamma$  une droite  $b$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma'$  une droite  $c$ . Enfin  $\alpha$  et  $\alpha'$  se rencontrent à angle droit; de même  $\beta$  et  $\beta'$ , de même  $\gamma$  et  $\gamma'$ . On a bien retrouvé toutes les particularités de la figure 1.

7. On peut encore rattacher le théorème à la théorie des systèmes de vecteurs. Partons du lemme suivant :

*Soient  $(T_1)$ ,  $(T_2)$ ,  $(T_3)$  trois torseurs (ou systèmes de vecteurs), dont l'ensemble forme un torseur nul. Les axes de ces torseurs rencontrent à angle droit une même droite.*

En effet, à chaque torseur  $(T_i)$  on peut attacher un complexe linéaire  $C_i$ , lieu des axes de moment nul de ce torseur. Les trois complexes  $C_i$  appartiennent à un faisceau, car toute droite commune à  $C_1$  et à  $C_2$  étant axe de moment nul de  $(T_1)$  et de  $(T_2)$ , ainsi que de  $(T_1) + (T_2) + (T_3)$ , nul par hypothèse, l'est aussi de  $(T_3)$ , donc appartient à  $C_3$ . Or on sait que le lieu des axes des complexes d'un faisceau est un cylindroïde, dont toutes les génératrices rencontrent à angle droit

une même droite. Il en est donc ainsi des axes des  $C_i$ . Mais ces axes sont confondus avec ceux des torseurs correspondants. Le lemme est donc établi.

Cela posé, soient  $A, B, C$  trois vecteurs de même module;  $A', B', C'$  les vecteurs opposés. Soient, en reprenant les notations du n° 4,  $\alpha, \beta, \gamma$  les bissectrices des couples  $(B, C)$  ou  $(B', C')$ ,  $(C, A)$  ou  $(C', A')$ ,  $(A, B)$  ou  $(A', B')$ , et  $\alpha', \beta', \gamma'$  les bissectrices des couples  $(B, C')$  ou  $(B', C)$ ,  $(C, A')$  ou  $(C', A)$ ,  $(A, B')$  ou  $(A', B)$ .

Les six vecteurs considérés formant un torseur nul, il en est de même des trois torseurs  $(B, C')$ ,  $(C, A')$ ,  $(A, B')$ . Donc les axes de ces torseurs, qui ne sont évidemment autres que les bissectrices  $\alpha', \beta', \gamma'$ , rencontrent à angle droit une même droite  $\delta$ .

En groupant les vecteurs de manière à former les trois torseurs  $(B, C')$ ,  $(C, A)$ ,  $(A', B')$ , on reconnaît que les bissectrices  $\alpha', \beta, \gamma$  rencontrent à angle droit une même droite  $\alpha$ . On achève comme au n° 6.

Cette démonstration est plus concise que celle que j'ai indiquée en premier lieu, mais elle ne montre pas que les droites  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  peuvent être données *a priori*.