NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE FABRY

Sur la définition de la fonction e^x

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 371-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__371_0>

[D6cα]

SUR LA DÉFINITION DE LA FONCTION e^x;

PAR EUGÈNE FABRY.

La méthode classique pour définir la fonction exponentielle consiste à chercher la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ pour m infini, et à démontrer que cette limite est donnée par une série dont la valeur numérique est représentee par e. On démontre ensuite que $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a la même limite que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$, et que cette limite est aussi représentée par une série qui donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Une autre méthode consiste à représenter par $f(x)$ la fonction définie par cette série, à etudier ces propriétes par des combinaisons de séries, en particulier

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

En donnant à x et y, successivement, des valeurs entières, fractionnaires, incommensurables, on en déduit

$$f(x) = e^x.$$

Je veux montrer que l'on peut simplifier ces démonstrations. en suivant une marche inverse plus directe, et en partant de la fonction a^x.

Supposons $a > 1$. Si x est entier positif, a^x est un produit de x facteurs égaux. Si x est un nombre fractionnaire, on a la racine d'un produit. Si x est incommensurable, on peut former une suite de valeurs commensurables, et représenter par a^x la limite des valeurs correspondantes. De ces définitions on peut déduire la propriété fondamentale

$$a^{x+y} = a^x . a^y,$$

où x et y sont deux nombres positifs ou négatifs. Pourvu que $a > 1$, a^x augmente avec x; car, si $y > 0$,

$$a^{x+y} = a^x . a^y > a^x.$$

$\frac{a^x - 1}{x}$ *augmente aussi avec* x. Le but de ce calcul étant de former la dérivée, nous éviterons de l'utiliser. Il s'agit de démontrer directement que

$$(1) \qquad \frac{a^x - 1}{x} > \frac{a^y - 1}{y},$$

si $a > 1$, $x > y > 0$.

Supposons d'abord que x et y aient un rapport commensurable :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = z,$$

où p et q sont entiers. Soit

$$a^z = b,$$
$$a^x = a^{pz} = b^p, \qquad a^y = b^q.$$

L'inégalité (1) à démontrer devient :

$$\frac{b^p - 1}{p} > \frac{b^q - 1}{q} \qquad (p > q),$$

ou, en divisant par $b - 1$, qui est positif :

$$q(b^{p-1} + b^{p-2} + \ldots + b + 1) > p(b^{q-1} + b^{q-2} + \ldots + b + 1),$$
$$q(b^{p-1} + b^{p-2} + \ldots + b^q) > (p - q)(b^{q-1} + b^{q-2} + \ldots + b + 1).$$

En considérant chaque produit comme une somme de q, ou de $p-q$, termes égaux, le premier membre renferme $q(p-q)$ termes, dont q sont toujours égaux entre eux; le second membre renferme de même $(p-q)q$ termes, dont $p-q$ sont, chaque fois, égaux. Chacun des termes du premier membre est supérieur à chaque terme du second membre, et l'inégalité est démontrée.

Si le rapport des nombres x et y n'est pas commensurable, on peut choisir des nombres u et v, ayant avec x des rapports commensurables, tels que

$$x > u > y > v,$$

on a alors

$$\frac{a^x - 1}{x} > \frac{a^u - 1}{u} > \frac{a^v - 1}{v},$$

on pourra former des suites de nombres u et v dont la différence tendra vers zéro, ce qui permet d'étendre l'inégalité (1) au cas où y et x ont un rapport incommensurable.

Si x prend des valeurs positives décroissantes et tendant vers zéro, $\frac{a^x - 1}{x}$ décroît et tend vers une limite que nous représenterons par A.

Si l'exposant prend des valeurs négatives $-x$, qui augmentent et tendent vers zéro, la limite sera la même, car

$$\frac{a^{-x} - 1}{-x} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{a^x - 1}{x}.$$

Le premier facteur tend vers 1, le second vers A. La dérivée de a^x est la limite, pour $h = 0$, de

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

cette limite est $\mathrm{A}a^x$.

Il en résulte que A ne peut pas être nul, puisque a^x n'est pas une constante.

La dérivée seconde de a^x est $A^2 a^x$.

La dérivée d'ordre n est $A^n a^x$.

En appliquant la formule de Mac-Laurin, on en déduit le développement en série :

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{2} + \ldots + \frac{A^n x^n}{n!} + \ldots.$$

Nous représenterons par e la valeur que doit prendre a pour que $A = 1$; par définition, la limite de

$$\frac{e^h - 1}{h},$$

pour $h = 0$, sera 1. Alors

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Pour $x = 1$, on en déduit la série qui détermine la valeur numérique du nombre e.