

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 351-355

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__351_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2327.

(1917, p. 326.)

Si sur chaque rayon vecteur OM d'une lemniscate de centre O, on porte, à partir de O, une longueur égale au rayon de courbure de la courbe en M, le lieu des extrémités des longueurs ainsi obtenues est une hyperbole équilatère.

F. BALITRAND.

SOLUTION

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On sait que la lemniscate peut être regardée comme la podaire, par rapport à son centre O, de l'hyperbole équilatère qui lui est bitangente en ses sommets et admet, par suite, pour asymptotes les tangentes Ox et Oy en son point double.

Soit A un point quelconque de cette hyperbole équilatère ⁽¹⁾,

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

milieu du segment ST de la tangente compris entre les asymptotes Ox et Oy ; le point correspondant M de la lemniscate est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur ST , et, puisque, dans le triangle rectangle OST , OA est médiane et OM hauteur, ces deux droites sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle xOy , c'est à-dire à l'axe commun de la lemniscate et de l'hyperbole.

Si N est le quatrième sommet du rectangle construit sur OM et MA , MN est la normale à la lemniscate et l'on sait que, si C est le centre de courbure correspondant, on a

$$MC = \frac{MN}{3} = \frac{OA}{3} \quad (1).$$

Si donc on porte sur OM le vecteur OP égal à MC , on voit que le lieu du point P est symétrique, par rapport à l'axe de la lemniscate, de la courbe homothétique de l'hyperbole équilatère, relativement au centre O , pour un rapport d'homothétie égal à $\frac{1}{3}$. C'est donc bien aussi une hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy .

Autres solutions par l'AUTEUR et MM. DUFOUR, BALITRAND, FAUCHEUX, R.-S. DE BEIRES, LÉMAIRE, LONG, ROSE.

2328.

(1917, p. 320.)

Étant donnée une lemniscate de centre O et de sommet A , on mène un rayon vecteur quelconque OM et l'on projette le sommet A sur ce rayon vecteur en P .

1° Démontrer que l'aire du secteur de lemniscate AQM et l'aire du triangle OAP sont égales. En déduire un moyen de diviser un secteur de lemniscate en deux parties équivalentes, avec la règle et le compas et sans supposer la courbe tracée.

2° La perpendiculaire élevée en O à OM et la normale

(1) M. d'Ocagne donne, dans son *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique* (t. I, p. 143), une démonstration géométrique fort simple de cette propriété.

en M à la courbe se coupent en Q. Démontrer que l'aire du triangle MOQ est double de celle du triangle AOP.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

1° L'équation de la lemniscate étant

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega,$$

nous avons

$$\text{aire OAM} = \frac{1}{2} \int_0^\omega \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{4} \sin 2\omega.$$

ρ et ω désignant les coordonnées de M; d'autre part,

$$\begin{aligned} \text{aire OAP} &= \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{OP} \sin \omega \\ &= \frac{1}{2} a^2 \cos \omega \sin \omega = \frac{a^2}{4} \sin 2\omega, \end{aligned}$$

ce qui démontre la première partie; si OM'' est le rayon vecteur partageant le secteur OMM' de la lemniscate en deux parties équivalentes, et si AP' et AP'' sont perpendiculaires sur OM' et OM'' , on doit avoir

$$2 \text{aire OAP}'' = \text{aire OAP} + \text{aire OAP}',$$

et par suite

$$2 \text{P}''\text{H}'' = \text{PH} + \text{P}'\text{H}',$$

H, H', H'' désignant les projections sur OA des points P, P' et P''. De la la construction suivante de OM'' , quand on a OM et OM' : on trace le cercle de diamètre OA, et par le milieu de la corde PP' , on mène la parallèle à OA, qui coupe l'arc PP' en P'' . la droite OP'' partage le secteur OMM' en deux parties équivalentes. Nous avons supposé les points M et M' sur le même arc OA de la lemniscate, mais la construction s'applique encore si les points appartiennent l'un à un arc OA, l'autre à l'arc symétrique par rapport à OA.

2° Le lieu du point M' tel que

$$\overline{\text{OM}} \cdot \overline{\text{OM}'} = a^2$$

est l'hyperbole équilatère de sommet A et de centre O; la tangente en M' à cette hyperbole coupant les tangentes au point double à la lemniscate en B et C, M' est le milieu de BC, la normale MQ à la lemniscate et la normale en M' à l'hyperbole forment un triangle isocèle IMM'; si ω désigne l'angle MOA, on peut écrire

$$\widehat{OMQ} = \widehat{IM'M} = 90^\circ - \widehat{OM'C} = 90^\circ - 2\widehat{M'OB} = 2\omega,$$

d'où

$$OQ = OM \cdot \text{tang } 2\omega,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \text{aire MOQ} &= \frac{1}{2} OQ \cdot OM = \frac{1}{2} \overline{OM}^2 \text{ tang } 2\omega \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin 2\omega = 2 \cdot \text{aire AOP}. \end{aligned}$$

Autres solutions de l'AUTEUR et de MM. R.-S. DE BEIRES, FAUCHEUX, ROSE.

2442.

(1920, p. 200.)

Etant donné un réseau tangentiel des coniques, les cercles principaux des coniques du réseau dont le foyer décrit une droite sont orthogonaux à un cercle fixe.

Ce théorème comprend comme cas particulier le théorème de M. T. Lemoyne relatif aux cercles podaires des points d'une droite, par rapport à un triangle (N. A., 1904, p. 400).

R. B.

SOLUTION

Par M. M.-F. EGAN.

Soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite, l'équation tangentielle d'une conique ayant ses foyers en F(ξ , η) et F'(ξ' , η') s'écrira

$$(1) \quad (\xi u + \eta v + w)(\xi' u + \eta' v + w) + \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

La puissance d'un foyer par rapport au cercle principal

est λ , et le centre de ce cercle est le milieu de FF' , son équation est donc

$$(2) \quad (x - \xi)(x - \xi') + (y - \eta)(y - \eta') + \lambda = 0.$$

(On retrouverait cette équation en cherchant la podaire de la conique par rapport à F ou F' .)

Si l'équation de la conique est donnée sous la forme

$$(3) \quad au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fvw + 2gwu + 2huv = 0,$$

on a

$$\frac{\xi\xi' + \lambda}{a} = \frac{\eta\eta' + \lambda}{b} = \frac{1}{c} = \frac{\xi + \xi'}{2g} = \frac{\eta + \eta'}{2f},$$

et l'équation du cercle principal devient

$$(4) \quad c(x^2 + y^2) - 2gx - 2fy + a + b - \lambda c = 0.$$

Supposons maintenant que F décrive l'axe des x . On a $\eta = 0$, d'où $\lambda c = b$. L'équation (4) est alors linéaire en a , c , f , g , ce qui démontre la proposition énoncée.

Le théorème de M. Lemoine envisage le cas où trois tangentes de la conique sont données.

Autres solutions de MM. R. BOUVAIST, FAUCHEUX, ROY, SICARD.