

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 232-240

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__232_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2388.

(1919, p. 39.)

Dans un quadrilatère complet, les orthopôles de chacun des côtés, pris par rapport au triangle formé par les trois autres côtés, sont quatre points collinéaires avec les orthocentres des quatre triangles obtenus en prenant les côtés trois à trois.

En déduire que, dans un triangle, l'orthopôle d'une droite appartient à la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre sur la transversale réciproque de cette droite.

R. GOORMAGHTIGH.

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Considérons le quadrilatère complet formé par un triangle ABC et une transversale $A'B'C'$. D'après des théorèmes connus, les orthocentres des quatre triangles obtenus en prenant BC , CA , AB , $A'B'C'$ trois à trois appartiennent à la directrice Δ de la parabole π tangente à ces droites, et Δ est

l'axe radical des cercles de diamètres AA' , BB' , CC' . Or ces cercles ne sont autres que les cercles podaires de A' , B' , C' par rapport au triangle ABC , et, d'après le théorème de T. Lemoyne (*N. A.*, 1904, p. 400), ces cercles ont même puissance par rapport à l'orthopôle de $A'B'C'$ par rapport au triangle ABC ; cet orthopôle appartient donc à Δ , ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

La deuxième partie résulte ensuite de cette proposition connue que la transversale réciproque de $A'B'C'$ par rapport au triangle ABC est parallèle à l'axe de π .

Autres solutions par MM. BOUVAIST, THEBAULT, SERBAN, A. GHEORGHIN.

2422.

(1919, p. 360.)

On considère les ellipses U qui ont un même foyer F et un même sommet B du petit axe. Trouver :

1° *L'enveloppe de ces courbes; 2° le lieu des sommets A et A' du grand axe; 3° le lieu du centre de courbure en B ; 4° le lieu du centre de courbure au second sommet B' du petit axe.*

J. NEUBERG.

SOLUTION

Par René MARCHAY.

1° Le grand axe des ellipses est constant et le foyer mobile F' décrit un cercle. Soit donc, en généralisant un peu la question, à trouver l'enveloppe des coniques qui ont un foyer fixe F , dont l'autre foyer F' décrit une circonférence (F') et dont l'axe focal est constant.

M étant commun à deux de ces coniques qui correspondent à deux positions infiniment voisines F' et F'_1 du foyer mobile, on aura

$$MF \pm MF' = 2a = MF \pm MF'_1,$$

d'où

$$MF' = MF'_1;$$

MF' est donc normale à (F') . L'enveloppe cherchée est donc une conique ayant pour foyers F et le centre de (F') . Dans le cas présent cette enveloppe est l'ellipse de foyers B et F et de grand axe $3a$.

2° Soit C le centre d'une ellipse U . Son lieu est le cercle (C)

de diamètre FB; on en conclut que les extrémités du grand axe décrivent un limaçon de Pascal (cardioïde ayant en F le rebroussement).

3° et 4° Le centre de courbure D en B est à l'intersection de BC et du cercle circonscrit à BFF'; l'angle $\widehat{BFD}$ est donc droit et le lieu de D est la perpendiculaire élevée en F à la droite BF.

Soit enfin D' le centre de courbure en B'; on a

$$B'D = BD.$$

Or B' décrit le cercle de centre F et de rayon BF, le lieu de D' est donc une strophoïde droite.

Autres solutions par l'Auteur et MM. BOUVAIST, CONVERS, EDMONDSON, ROY.

2423.

(1919, p. 260.)

On considère les coniques U qui ont même axe focal et a même foyer F, et le second foyer F' en un point quelconque d'une droite donnée. Trouver :

1° Le lieu des sommets A et A' de l'axe focal; 2° l'enveloppe des directrices d, d'; 3° l'enveloppe des coniques U.

J. NEUBERG.

SOLUTION

Par G. ROY.

1° Le centre O des coniques U décrit une droite Δ_1 homothétique dans le rapport $\frac{1}{2}$ de la droite Δ lieu de F', le centre d'homothétie étant F. Les sommets A et A' étant tels que

$$OA = OA' = a,$$

ces deux points se déplacent sur une conchoïde de Nicomède.

2° Soient D et D' les points de rencontre de d et d' avec l'axe, on a

$$\overline{OF} \cdot \overline{OD} = - \overline{OF} \cdot \overline{OD'} = a^2,$$

le lieu des points D et D' est donc formé de deux conchoïdes

de Sluze jumelles, mais ce lieu est la podaire des enveloppes de d et d' par rapport à F qui sont, par suite, des paraboles. Déterminons leurs foyers. Si I désigne l'intersection de d avec la parallèle à Δ_1 menée par K tel que, O_1 étant la projection de F sur Δ_1 ,

$$\overline{O_1 F} \cdot \overline{O_1 K} = \alpha^2,$$

et si F_1 est le point de rencontre de $O_1 F$ avec la perpendiculaire en I à d , on a

$$\overline{O_1 F} \cdot \overline{O_1 K} = \overline{O F} \cdot \overline{O D}$$

et les deux points O et O_1 ont même puissance par rapport au cercle ω de diamètre IF . On a donc

$$O\omega = O_1\omega$$

et la perpendiculaire au milieu de OO_1 passe par ω , elle passe aussi par le milieu de KI et

$$\overline{O_1 O} = \overline{KI}.$$

Les triangles rectangles FOO_1 et F_1IK sont donc égaux et

$$\overline{O_1 F} = \overline{KF_1}.$$

La parabole cherchée, enveloppe de d , a donc pour foyer F_1 et pour tangente au sommet la parallèle à Δ menée par K .

Si E et E' sont les points de rencontre de d et d' avec FO_1 , on a

$$\overline{EE'} \cdot \overline{FO_1} = 2\alpha^2$$

et par suite $\overline{EE'}$ est constant et l'enveloppe de d' se déduit de celle de d par translation.

3° Si M est le point caractéristique d'une conique U , on voit facilement que MF' est perpendiculaire sur Δ tel que

$$MF' + MF = 2\alpha \quad \text{ou} \quad |MF' - MF| = 2\alpha.$$

Et l'enveloppe est constituée par le lieu des points tels que la somme de leurs distances ou la différence de leurs distances à un point et à une droite est constante : on sait que ces lieux sont des arcs de parabole dont les limites sont faciles à déterminer.

Autres solutions par l'Auteur et MM. BOUVAIST, CONVERS, EDMONDSON, MARCHAY.

2434.

(1920, p. 39.)

Étant donnés une sphère S , l'un de ses diamètres Δ , deux de ses tangentes Δ_1 et Δ_2 parallèles à Δ , dont les points de contact soient diamétralement opposés, enfin les grands cercles C_1 et C_2 de cette sphère, dont les plans, menés par le diamètre perpendiculaire au plan de Δ_1 et Δ_2 , sont inclinés à 45° sur Δ , on considère le conoïde droit Γ , de directrice Δ , qui passe par les cercles C_1 et C_2 , puis les conoïdes droits Γ_1 et Γ_2 , circonscrits à S , qui ont respectivement pour directrices Δ_1 et Δ_2 . On demande de calculer les volumes des solides constitués par :

- 1° La partie du conoïde Γ limitée aux cercles C_1 et C_2 ;
- 2° La partie du même conoïde intérieure au cylindre circonscrit à la sphère S et d'axe Δ ;
- 3° L'ensemble de la sphère et des conoïdes Γ_1 et Γ_2 limités respectivement à leurs directrices Δ_1 et Δ_2 .

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Prenant pour direction de la verticale celle de l'axe Δ , pour plan de front celui qui contient cet axe et les tangentes Δ_1 et Δ_2 , considérons les projections horizontale et verticale de la figure définie dans l'énoncé.

Dans un plan horizontal quelconque, on a les génératrices m_1m_2 et n_1n_2 du conoïde Γ , d_1r_1 et d_1s_1 du conoïde Γ_1 , d_2r_2 et d_2s_2 du conoïde Γ_2 , et l'on voit que, si σ est l'aire du triangle om_1n_1 , σ' celle du secteur circulaire $op_1d_1q_1$, σ'' celle du triangle mixtiligne $d_1r_1c_1s_1$, et si R est le rayon de la sphère, on a, pour les trois volumes demandés,

$$V = \int_0^R \int_0^{\sqrt{z}} \sigma \, dz,$$

$$V' = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sigma' \, dz,$$

$$V'' = \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^R \sigma'' \, dz.$$

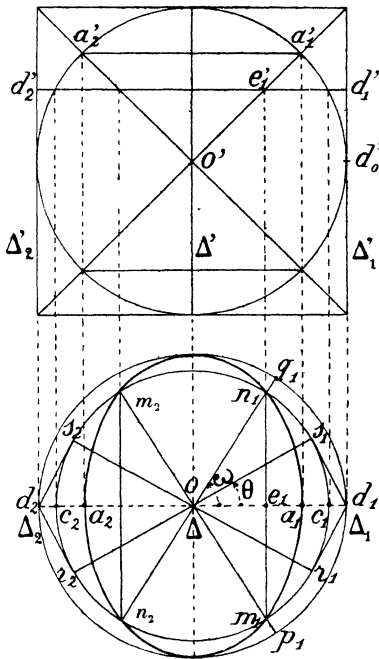
Les aires σ , σ' et σ'' sont faciles à déterminer. En effet, on a immédiatement

$$oe_1 = z, \quad e_1 n_1 = \sqrt{R^2 - 2z^2}, \quad \tan \omega = \frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z},$$

d'où

$$\sigma = z \sqrt{R^2 - 2z^2},$$

$$\sigma' = R^2 \arctan \frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z}.$$



D'autre part, puisque

$$d_1 s_1 = R \sin \theta \quad \text{et} \quad os_1 = R \cos \theta,$$

$$\sigma'' = R^2 (\sin \theta \cos \theta - \omega \cos^2 \theta).$$

D'ailleurs, comme tangentes issues d'un même point à une même sphère, on a

$$z = d'_0 d'_1 = d_1 s_1 = R \sin \theta,$$

d'où

$$dz = R \cos \theta d\theta,$$

θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand z varie de 0 à R .

Finalement, on obtient

$$V = 4 \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} z \sqrt{R^2 - 2z^2} dz,$$

$$V' = 4 R^2 \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \arctan \frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z} dz,$$

$$V'' = \frac{4\pi}{3} R^3 + 4 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos^2 \theta - \theta \cos^3 \theta) d\theta.$$

Nous allons calculer successivement ces trois intégrales que nous représenterons par I , I' et I'' .

1° Pour le calcul de I , il suffit d'effectuer le changement de variable défini par

$$R^2 - 2z^2 = u^2,$$

pour lequel

$$-2z dz = u du.$$

Il transforme l'intégrale en

$$I = \frac{1}{2} \int_0^R u^2 du = \frac{R^3}{6}.$$

Par suite,

$$V = \frac{2}{3} R^3.$$

2° Passons au calcul de I' . Si l'on pose

$$\frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z} = t,$$

d'où

$$z = \frac{R}{(t^2 + 2)^{\frac{1}{2}}},$$

on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int \arctan t \cdot dz &= z \cdot \arctan t - \int z \frac{dt}{1+t^2} \\ &= z \cdot \arctan t - R \int \frac{dt}{(1+t^2)(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

(239)

Or, pour $z = 0$ et $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$, on a respectivement $t = \infty$ et $t = 0$. Il s'ensuit que

$$I' = R \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Effectuons dès lors le changement de variable défini par

$$\sqrt{t^2 + 2} = t + \sqrt{2u}$$

ou

$$t = \frac{1-u}{\sqrt{2u}},$$

pour lequel on a

$$t^2 + 1 = \frac{1+u^2}{2u}, \quad t^2 + 2 = \frac{(1+u)^2}{2u}, \quad dt = \frac{-(u+1)}{2\sqrt{2u}\sqrt{u}} du.$$

Comme, d'autre part, pour $t = 0$ et $t = \infty$, on a $u = 1$ et $u = 0$, il vient, par ces substitutions,

$$I' = R \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi R}{4}.$$

Dès lors,

$$V' = \pi R^3.$$

3° Les formules classiques de la multiplication des arcs permettent bien aisément de mettre l'intégrale I'' sous la forme

$$I'' = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin \theta + \sin 3\theta - \theta(3 \cos \theta + \cos 3\theta)] d\theta,$$

ou, si l'on applique une intégration par parties au terme contenant θ en facteur,

$$\begin{aligned} I'' &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{3}(3 \cos \theta + \sin 3\theta) - \frac{\theta}{3}(9 \sin \theta + \sin 3\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9}(27 \cos \theta + \cos 3\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[-\frac{1}{9}(9 \cos \theta + \cos 3\theta) - \frac{\theta}{12}(9 \sin \theta + \sin 3\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{10}{9} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Portant cette valeur dans l'expression de V'' , on a

$$V'' = \frac{40}{9} R^3.$$

Il est assez curieux que les volumes V et V'' , bien que s'appliquant à des solides dans la délimitation desquels interviennent des corps ronds, soient indépendants du nombre π ; quant à V' , l'intérêt qui s'y attache tient à l'extrême simplicité de l'expression où figure ce nombre π .

2457.

(1922-1923, p. 190.)

On donne une conique, deux points A et A' sur la courbe, un point P dans son plan. Si AM et A'M' sont deux cordes variables de la conique telles que la droite MM' passe au point P, les droites AM et A'M' rencontrent une droite fixe menée par ce point en des points I et I' qui sont en involution sur cette droite.

G. F.

SOLUTION

Par J. RODRIGUEZ BACHILLER.

La correspondance entre I et I' est évidemment algébrique et $(1, 1)$, donc *homographique*. Pour vérifier qu'elle est *involution*, joignons IA' qui coupe la conique donnée en N' , puis PN' qui détermine sur la conique donnée le point N ; il reste à montrer que la droite AN passe par I' . C'est ce qui est évident parce que le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $AMM'A'N'NA$ prouve que les points de rencontre des côtés $(AM, A'N') \equiv I, (MM', NN') \equiv P, (M'A', NA) \equiv I'$, sont en ligne droite.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, HARMEGNIES, PIEDVACHE.

