

R. THIRY

Une première leçon sur les nombres complexes

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2 (1923), p. 17-25

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__17_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[B12]

UNE PREMIÈRE LEÇON SUR LES NOMBRES COMPLEXES ;

PAR R. THIRY

(Strasbourg).

I. L'introduction dans l'enseignement de la notion si féconde de nombre complexe se heurte toujours au début à quelques difficultés d'ordre pédagogique. Il est en effet impossible de faire comprendre dès l'abord aux élèves l'utilité de ces nouveaux éléments de calcul, et l'attitude *a priori* que le professeur est presque forcé de prendre, jointe quelquefois à des façons de parler défectueuses ainsi qu'à une sorte de mysticisme enveloppant les quantités improprement dites « imaginaires », tout cela risque de dérouter les élèves.

Deux procédés sont le plus souvent employés pour définir les quantités complexes et caractériser leurs propriétés. Le premier consiste à regarder les nombres complexes comme des expressions linéaires d'une variable i et à leur appliquer les règles des opérations sur les polynomes, en convenant de remplacer systématiquement tout polynome de degré supérieur au premier par le reste de sa division par $i^2 + 1$. Ce procédé, indiqué par Cauchy dans sa théorie des équivalences algébriques, a de nombreux adeptes; il présente à mon avis l'inconvénient de paraître aux élèves excessivement arbitraire et d'introduire dans une question purement arithmétique des considérations, auxquelles on ne pensera plus guère par la suite, sur la division des polynomes à une variable. Le deuxième procédé consiste à créer une arithmétique des groupes de deux nombres comme on l'a fait pour les nombres pris isolément. On en trouvera une exposition type dans les leçons d'Analyse de Ch. Méray (1). L'arbitraire se trouve alors rejeté dans la définition des opérations, en particulier de la multiplication, et d'autre part l'exposé ainsi obtenu, logiquement très satisfaisant, est généralement regardé comme trop abstrait pour des débutants.

Mon but, dans le présent article, est d'exposer ce deuxième procédé sous une forme qui me paraît simple et naturelle. Je n'ai du reste nullement l'intention de faire une « leçon » sur les nombres complexes, mais simplement d'indiquer les grandes lignes d'une méthode

(1) Parmi les livres d'enseignement élémentaire utilisant ce procédé citons seulement les *Leçons d'Algèbre élémentaire* de Carlo Bourlet, le *Cours de Mathématiques générales* de E. Vessiot et P. Montel et *Les Mathématiques de l'Élève Ingénieur* de M. Weber. En particulier, les idées exposées dans ce dernier ouvrage se rapprochent beaucoup de celles que l'on trouvera ici.

d'exposition. En particulier, je supprime naturellement tous les théorèmes concernant le développement de la théorie une fois les notions de base introduites; le lecteur les rétablira sans peine avec leurs démonstrations plus ou moins classiques.

2. REVISION DES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES RELATIFS.

— Dès que l'on a justifié par des exemples simples l'utilité de l'introduction des nombres relatifs, une représentation géométrique évidente consiste, après avoir fait choix d'une unité de longueur, à regarder un tel nombre a comme l'abscisse d'un point M sur une droite orientée $x'Ox$ portant un point origine O .

Deux points de vue sont alors possibles :

I. *Le point M peut être regardé comme déduit du point O par une translation de grandeur $|a|$, de sens Ox ou Ox' suivant le signe de a .*

II. *Si l'on considère sur la droite $x'Ox$ le point U d'abscisse $+1$, le segment \overline{OM} peut être regardé comme déduit du segment \overline{OU} par une homothétie positive de rapport $|a|$ accompagnée ou non d'une symétrie par rapport à l'origine suivant le signe de a .*

Inversement, la donnée du point M (ou du segment \overline{OM}) peut servir à *définir* le nombre relatif a et tout raisonnement ou toute définition fait sur le point ou le segment équivaut à un raisonnement ou à une définition sur a .

Le nombre relatif peut alors être regardé comme un symbole caractérisant les opérations géométriques I ou II. On dit souvent dans ce sens que ce nombre est un *opérateur*.

Définition des opérations sur les nombres relatifs :

ADDITION. — *Le principe de l'addition repose sur l'application répétée de l'opération géométrique I. De façon précise, ajouter a' à a c'est faire subir au point représentatif de a la translation qui a permis de déduire de l'origine le point représentatif de a' .*

MULTIPLICATION. — *Le principe de la multiplication repose sur l'application répétée de l'opération géométrique II.*

De façon précise, multiplier a par a' c'est faire subir au segment représentatif de a l'homothétie-symétrie qui a permis de déduire du segment unité \overline{OU} le segment représentatif de a' .

Il est évident à première vue que les opérations ainsi définies sont *commutatives* et *associatives* et que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition. Ces définitions ne sont du reste que l'extension naturelle des définitions arithmétiques des opérations sur les nombres entiers. Remarquons seulement que la définition de la multiplication donne de façon immédiatement intuitive la règle des signes qui trop souvent est imposée sans justification.

Sur ces bases se développe comme d'habitude la théorie du calcul algébrique.

3. INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES. — Après avoir créé ainsi une algèbre des points ou des segments portés par une droite orientée, il est naturel de chercher à créer une théorie analogue pour les points ou les vecteurs portés par un plan. En réalité, le succès n'en est nullement assuré *a priori* et cette idée de généralisation ne trouvera sa pleine justification que dans la

fécondité de la théorie projetée, fécondité qui sera abondamment constatée par la suite. Puisqu'il faut se donner deux nombres relatifs pour fixer la position d'un point dans un plan (par exemple son abscisse a et son ordonnée b par rapport à des axes rectangulaires), ce que nous cherchons à construire est donc une arithmétique des groupes de deux nombres relatifs de la forme (a, b) . C'est un tel groupe que nous appellerons un nombre complexe et nous conviendrons de dire qu'il est l'affixe du point correspondant.

Pour définir les opérations sur ces nouveaux éléments, nous serons guidés par le souci constant de leur donner les mêmes propriétés que les opérations définies au paragraphe 2, de façon que nous puissions regarder l'algèbre des nombres relatifs comme contenue, dans des conditions à préciser, dans l'interprétation plus large que nous nous proposons.

Nous ferons donc choix d'une unité de longueur et nous considérerons un plan orienté portant deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy . La position d'un point M du plan peut être fixée de deux points de vue :

I'. *Le point M peut être regardé comme déduit du point O par une translation dont les projections sur les axes sont définies par les deux nombres relatifs a et b , coordonnées rectangulaires du point M .*

II'. *Si l'on considère sur la droite Ox le point U d'abscisse $+1$, le vecteur (OM) peut être regardé comme déduit du vecteur (OU) par une homothétie positive ayant pour rapport la distance arithmétique $OM = \rho$ suivie d'une rotation de l'un quelconque des angles $\widehat{Ox, OM} = \varphi$ définis à $2k\pi$ près.*

Le rapport d'homothétie ρ s'appelle le module du nombre complexe, l'angle φ s'appelle l'argument et l'on a immédiatement en comparant les deux points de vue

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \quad \rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Deux nombres complexes seront dits égaux lorsqu'ils seront représentés par le même point (ou le même vecteur).

Nous pourrons donc ici encore regarder le nombre complexe comme un opérateur symbolisant, suivant le point de vue, la façon dont le point M est déduit de l'origine O , ou celle dont le vecteur (OM) est déduit du vecteur (OU) .

Convention fondamentale. — Dans le but d'obtenir un lien avec l'algèbre des nombres relatifs, nous conviendrons que les points de l'axe Ox représentent, comme au paragraphe 2, les nombres relatifs ordinaires et nous écrirons par la suite les complexes du genre $(a, 0)$ sous la forme simple a . Une rotation de π équivalant à une symétrie par rapport à l'origine, il est évident que les définitions I et II sur les nombres relatifs rentrent dans les définitions plus générales I' et II' et que notre convention ne nous expose à aucune contradiction.

Définition des opérations sur les nombres complexes. — Pour définir l'addition et la multiplication, nous n'avons qu'à reprendre tout naturellement les formes de définition qui nous ont servi pour les nombres relatifs. Je les répète presque textuellement :

ADDITION. — *Le principe de l'addition repose sur l'application répétée de l'opération géométrique I'. De façon précise, ajouter (a', b') à (a, b) , c'est*

faire subir au point représentatif de (a, b) la translation qui a permis de déduire de l'origine le point-représentatif de (a', b') .

MULTIPLICATION. — Le principe de la multiplication repose sur l'application répétée de l'opération géométrique II'. De façon précise, multiplier (a, b) par (a', b') , c'est faire subir au vecteur représentatif de (a, b) l'homothétie-rotation qui a permis de déduire du vecteur unité (OU) le vecteur représentatif de (a', b') .

Les opérations ainsi définies sont évidemment aussi commutatives et associatives et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Comme elles comprennent comme cas particulier les opérations sur les nombres relatifs, il est inutile de créer pour les représenter des signes spéciaux et nous pourrions conserver les signes $+$ et \times de l'algèbre ordinaire en étendant leur signification.

Enfin, de la définition de la multiplication, découle immédiatement la règle de multiplication des modules et d'addition des arguments.

A partir de ces bases, la théorie des nombres complexes se développe parallèlement à celle des nombres relatifs de façon entièrement classique; seul le calcul des inégalités fait ici défaut. Mentionnons seulement, pour terminer, le changement de notations qui conduit à l'écriture usuelle et aux règles pratiques.

Notations définitives. — Soit un nombre complexe (a, b) représenté par un point M. Projetons ce point en P sur Ox, en Q sur Oy; d'après la définition de l'addition, (a, b) , affixe de M, peut être regardé

comme la somme des affixes de P et de Q, on a donc

$$(a, b) = (a, o) + (o, b).$$

Considérons, d'autre part, le point V situé sur l'axe O γ à la distance +1 de l'origine, il est évident que le vecteur (OQ) peut se déduire du vecteur (OV) par une homothétie positive de rapport $|b|$ suivie ou non d'une symétrie par rapport à O suivant le signe de b . Autrement dit, l'affixe de Q peut être regardé comme le produit du nombre complexe $(o, +1)$ par le nombre complexe (b, o) . On a donc finalement

$$(a, b) = (a, o) + (o, +1)(b, o)$$

ou encore, d'après notre convention,

$$(a, b) = a + (o, +1)b.$$

Nous donnerons un nom à ce nombre complexe $(o, +1)$ que nous introduirons systématiquement par la suite et nous le représenterons par la lettre i . Nous aurons donc la notation définitive

$$(a, b) = a + ib \quad (1).$$

Propriétés du nombre complexe $i = (o, +1)$. — Il est évident, d'après la loi de multiplication, que le carré du nombre complexe i est le nombre complexe $(-1, o)$, c'est-à-dire le nombre relatif -1 .

(1) Remarquons qu'étant donnés deux nombres complexes pris au hasard et représentés par des vecteurs *n'ayant pas le même support*, on aurait toujours pu exprimer tout nombre complexe par une combinaison linéaire des deux premiers (les coefficients étant des nombres relatifs). Le choix comme vecteur de base de (OU) s'imposait naturellement; le vecteur (OV) est évidemment le plus simple et le plus symétrique que l'on pouvait lui adjoindre. Là est tout le secret de l'introduction du nombre i .

Conséquence. Règle définitive des opérations. — Les nombres complexes étant mis sous la forme $a+ib$, on pourra appliquer à ces nombres tous les procédés de calcul de l'algèbre usuelle, comme s'il s'agissait de nombres ordinaires, en convenant de remplacer toutes les fois qu'il sera possible le nombre complexe i^2 par le nombre relatif -1 .

Enfin, pour terminer, il n'est peut-être pas inutile de répéter que la théorie n'est justifiée que par son succès et sa fécondité et de remarquer qu'une extension nouvelle de la notion de nombre à l'étude des points et des vecteurs dans l'espace à plus de deux dimensions se heurte à de grosses difficultés. Il n'est en effet plus possible de conserver aux opérations *toutes* leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité). En abandonnant certaines d'entre elles, on a pu cependant créer des extensions nouvelles, mais ces simples remarques montrent la difficulté de l'entreprise et expliquent aussi sa moindre fécondité.