

MAURICE JANET

Capacités électriques et géométrie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 121-131

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__121_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[T5]

CAPACITÉS ÉLECTRIQUES ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ;

PAR MAURICE JANET.

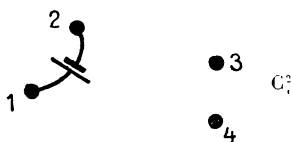
Si l'on se donne un système de conducteurs, suivant les connexions que l'on établit entre eux et la manière dont on les charge, on peut avoir à envisager diverses *capacités*. Les capacités les plus intéressantes que l'on est amené à introduire ainsi se trouvent liées entre elles par certaines relations dont il existe des représentations géométriques simples. Nous indiquerons deux représentations de cette nature en nous bornant au cas d'un système de quatre conducteurs : nous ne ferons ainsi appel qu'à l'espace à trois dimensions ; on pourrait étudier d'une manière analogue le cas de n conducteurs en faisant appel à l'espace à $n - 1$ dimensions. La première de ces représentations géométriques est due à Potier ⁽¹⁾ : la recherche d'une démonstration explicite des résultats indiqués par lui est l'origine de ce travail ; nous donnons une telle démonstration qui offre une application intéressante d'un théorème connu de géométrie élémentaire. Nous proposons ensuite une deuxième représentation géométrique, qui est à certains égards plus naturelle. Enfin la recherche d'un lien entre les deux représentations conduit à quelques énoncés géométriques que nous indiquons.

1. Supposons en présence *quatre* conducteurs,

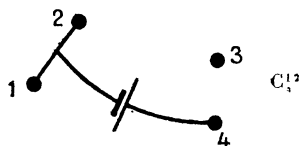
(¹) POTIER, *Capacités entre les conducteurs* (*Journal de Physique*, 3^e série, t. VI, 1897, p. 238). P. JANET. *Leçons d'électro-technique générale* (5^e éd., t. I, Chap II, n^o 15, p. 28).

suffisamment éloignés de tous les autres, et supposons-les d'abord à l'état neutre. Si l'on établit éventuellement des connexions entre eux et si l'on met deux des *conducteurs ainsi obtenus* (K), (K') respectivement en communication avec les deux bornes d'un générateur, d'une pile par exemple, il s'établit entre ces deux conducteurs une différence de potentiel de valeur absolue V , et ils prennent deux charges de même valeur absolue Q et de signes contraires; le rapport $\frac{Q}{V}$ est la *capacité* du système (K , K') *dans les conditions indiquées*. Nous emploierons pour cette capacité la notation suivante :

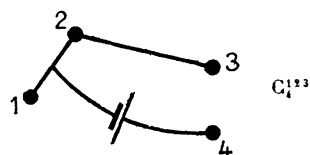
Si aucune connexion n'a été faite
et si K , K' sont les conducteurs 1, 2.



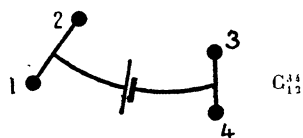
Si 1, 2 étant en communication,
 K , K' sont respectivement (1, 2)
et (4).



Si 1, 2, 3 sont en communication.

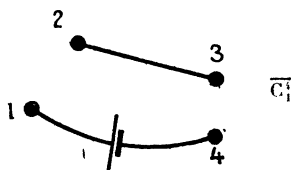


Si 1, 2 d'une part; 3, 4 de l'autre
sont en communication.



(123)

Si 2, 3 sont en communication,
K, K' étant respectivement 1,
4.



A ces hypothèses et aux hypothèses analogues que l'on peut faire en échangeant le rôle des conducteurs correspondent

$$6 + 12 + 4 \quad 3 + 6 = 31$$

capacités, auxquelles nous ferons correspondre 31 longueurs de définition simple dans un certain tétraèdre, tétraèdre (T) ou tétraèdre (Θ).

2. *Tétraèdre T.* — Les différences de potentiel de deux quelconques des quatre conducteurs sont des fonctions linéaires et homogènes bien déterminées des trois charges Q_2, Q_3, Q_4 ($Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$) (¹). Pour chaque distribution électrique possible, le potentiel de l'un des conducteurs peut être pris arbitrairement; ce potentiel choisi, les autres sont bien déterminés; autrement dit, on peut représenter les potentiels V_1, V_2, V_3, V_4 des quatre conducteurs d'un système donné par les formules

$$V_1 = \varphi, \quad V_2 = \varphi + \psi_2, \quad V_3 = \varphi + \psi_3, \quad V_4 = \varphi + \psi_4,$$

ou ψ_2, ψ_3, ψ_4 désignent des fonctions linéaires et homogènes bien déterminées, et φ une fonction arbitraire de Q_2, Q_3, Q_4 ; en prenant pour φ une fonction linéaire et homogène et écrivant l'expression de V_i en

(¹) Traduction de la formule $\int \int_{(D)} \frac{du}{dn} dS = 0$, ou u désigne une fonction harmonique dans le domaine limité par (D).

(124)

fonction des Q dont l'indice est différent de i , ce qui est possible grâce à l'équation $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$, nous obtenons un système de formules

$$V_i = \sum_{k=1}^{k=4} b_{ik} Q_k \quad \text{où} \quad b_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Assujettissons maintenant les b aux conditions $b_{ik} = b_{ki}$; grâce à la symétrie ⁽¹⁾ du tableau des coefficients des ψ , ces conditions sont compatibles; elles déterminent d'ailleurs entièrement la fonction φ . La signification physique des b s'aperçoit immédiatement en annulant deux des Q dans les formules précédentes :

$$b_{ik} = - \frac{1}{2 C_i^k}.$$

Cela posé, considérons un tétraèdre (T) $S_1 S_2 S_3 S_4$, dont les arêtes aient pour longueurs ⁽²⁾ les quan-

(1) Cette symétrie résulte de la formule

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_i V'_i = \sum_{i=1}^{i=4} Q'_i V_i,$$

où (Q, V) ; (Q', V') sont les charges et potentiels correspondant à deux distributions quelconques; formule qui est la traduction, dans le cas d'un système de conducteurs, de la suivante

$$\int \int_{(D)} u \frac{du}{dn} dS = \int \int_{(D)} u' \frac{du'}{dn} ds,$$

où u, u' désignent deux fonctions harmoniques dans le domaine limité par (D) .

(2) Les C sont liées entre elles par des relations d'inégalité qui prouvent que la construction du tétraèdre est *réellement* possible. Cela résultera *a posteriori* de l'étude qui suit : réciprocité des tétraèdres T et Θ , et note du numéro 3.

tés $\frac{1}{\sqrt{C_i^k}}$. La quantité S ,

$$S = Q_1 \cdot \overline{MS_1^2} + Q_2 \cdot \overline{MS_2^2} + Q_3 \cdot \overline{MS_3^2} + Q_4 \cdot \overline{MS_4^2},$$

est une fonction du point M qui prend la valeur $-2V_i$ lorsque M vient en S_i . D'ailleurs, puisque

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0,$$

le lieu des points pour lesquels S est égale à une constante k est un plan; quand la valeur de la constante varie, le plan se déplace parallèlement à lui-même; la distance de deux positions du plan est d'ailleurs proportionnelle à la variation de la constante. La direction de ce plan et le facteur de proportionnalité peuvent s'obtenir par l'un des procédés suivants (1) :

1° Répartissons les quatre points en deux groupes, $S_1 S_2 S_3$ d'une part, S_4 de l'autre; soit G_4 le centre de gravité de $S_1 S_2 S_3$ affectés des masses $Q_1 Q_2 Q_3$. Les plans considérés sont perpendiculaires à la droite $G_4 S_4$ et la différence des valeurs de la constante k pour deux tels plans est égale (en valeur absolue) à la distance des deux plans multipliée par

$$2|Q_4|, \text{ distance } G_4 S_4.$$

2° Répartissons les quatre points en deux groupes $S_1 S_2$ d'une part, $S_3 S_4$ de l'autre. Soient G_{12} le centre de gravité de $S_1 S_2$, affectés des masses Q_1, Q_2 ; G_{34} celui de $S_3 S_4$, affectés des masses Q_3, Q_4 . Les plans considérés sont perpendiculaires à la droite $G_{12} G_{34}$ et la différence des valeurs de k pour deux tels plans est égale à la distance des deux plans multipliée

(1) Voir p. ex. HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire*, t. II, n° 609.

par

$$2 | Q_1 - Q_2 |, \quad \text{distance } G_{12} G_{34}.$$

On appliquera l'une ou l'autre de ces règles aux diverses hypothèses faites; on remarquera que lorsque (1) et (2) sont en communication, les potentiels de (1) et de (2) devant être les mêmes, les plans considérés doivent être parallèles à l'arête $S_1 S_2$; et l'on arrivera aux conclusions suivantes :

Lorsque les inverses des racines carrées des C_i^k sont égales respectivement aux arêtes a_i^k (distances $S_i S_k$), les inverses des racines carrées de C_4^{12} , C_4^{123} , C_{12}^{13} , $\overline{C}_4^1$ sont égales respectivement aux longueurs suivantes :

a_4^{12} : distance de S_4 à l'arête $S_1 S_2$ (hauteur d'une face);

a_4^{123} : distance de S_4 au plan $S_1 S_2 S_3$ (hauteur du tétraèdre);

a_{12}^{34} : plus courte distance des arêtes $S_1 S_2$, $S_3 S_4$;

$\overline{a}_4^1$: distance mutuelle des parallèles à $S_2 S_3$ menées par S_1 et S_4 .

Faisons de plus une remarque qui nous sera utile dans la suite : dans le cas (3) où $V_2 = V_3 = V_4 = V$, la différence $V_1 - V$ s'écrit encore $Q_i \frac{h_i h_i}{\cos(S_1 H_1, S_i H_i)}$, où i est indifféremment 2, 3 ou 4 et où h_k représentent les longueurs des hauteurs $S_k H_k$ du tétraèdre. (On pourra, pour le voir, introduire d'abord le point K_i intersection de la perpendiculaire à la face $S_2 S_3 S_4$ en S_i avec le plan de la face opposée à S_i .)

3. Tétraèdre Θ . — Le tétraèdre Θ s'introduira immédiatement grâce aux formules qui donnent les

charges en fonction des potentiels

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} V_k,$$

où les a sont des constantes entièrement déterminées par la donnée du système des quatre conducteurs. Les deux équations, déjà rencontrées,

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_i V_i = \sum_{i=1}^{i=4} Q_i' V_i, \quad \sum_{i=1}^{i=4} Q_i = 0,$$

montrent immédiatement que le tableau des 16 coefficients a_{ik} est symétrique et que la somme des coefficients d'une même colonne (ou d'une même ligne) est nulle. Or si l'on considère quatre vecteurs dont la somme géométrique est nulle, leurs produits scalaires deux à deux forment précisément un tableau carré de 16 nombres jouissant des propriétés précédentes. Cette remarque suggère immédiatement la construction suivante : menons quatre vecteurs $\vec{\omega\Sigma_i}$ de même origine ω dont les produits scalaires deux à deux soient égaux aux a_{ik} ; il suffit ⁽¹⁾ pour cela de construire trois d'entre eux, ce qui est possible puisque l'on connaît leurs longueurs $\sqrt{a_{ii}}$ et les cosinus de leurs angles deux à deux $\frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}$; en leur adjoignant le vecteur opposé à leur somme géométrique, on obtient quatre vecteurs qui répondent à toutes les conditions

(¹) La construction est *réellement* possible, car on a les inégalités $a_{ii} > 0$, $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$ puisque l'énergie $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=4} Q_i V_i$ est une forme quadratique des V définie positive.

imposées, comme on le voit en utilisant les relations qui existent entre les a_{ik} . ω est évidemment le centre de gravité du tétraèdre $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$.

V_1, V_2, V_3, V_4 désignant quatre nombres quelconques, considérons le vecteur $\vec{V}$:

$$\vec{V} = V_1 \cdot \vec{\omega \Sigma_1} + V_2 \cdot \vec{\omega \Sigma_2} + V_3 \cdot \vec{\omega \Sigma_3} + V_4 \cdot \vec{\omega \Sigma_4}.$$

Son produit scalaire par $\vec{\omega \Sigma_i}$ est

$$V_1 a_{i1} + V_2 a_{i2} + V_3 a_{i3} + V_4 a_{i4} = Q_i.$$

On appliquera cette remarque aux cinq cas à étudier. On remarquera, pour simplifier, qu'un des potentiels, au choix, peut être supposé nul; on remarquera de plus que la condition éventuelle $Q_k = 0$ se traduit géométriquement par l'orthogonalité des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\omega \Sigma_k}$. On obtiendra alors les conclusions suivantes :

Les racines carrées des capacités $C_1^2, C_1^{12}, C_4^{123}, C_{12}^{34}, C_1^4$ sont égales respectivement aux longueurs suivantes du tétraèdre (Θ) :

β_1^2 : distance de Σ_1 (ou Σ_2) au plan $\omega \Sigma_3 \Sigma_4$;

β_4^{12} : distance de Σ_4 à la droite $\omega \Sigma_3$;

β_4^{123} : distance $\omega \Sigma_1$;

β_{12}^{34} : distance du milieu de $\Sigma_1 \Sigma_2$ au milieu de $\Sigma_3 \Sigma_4$;

$\bar{\beta}_1^4$: distance de Σ_1 (ou de Σ_4) à la droite qui joint les milieux de $\Sigma_2 \Sigma_3$ et de $\Sigma_1 \Sigma_4$.

4. *Construction de (Θ) à l'aide de (T).* — La remarque faite à la fin du n° 2 montre que des vecteurs, de même origine ω , parallèles aux hauteurs de (T), égaux à leurs inverses [tous du sens des hauteurs de (T)] considérées comme allant du sommet vers la

base, ou tous du sens contraire] forment ⁽¹⁾ précisément un système répondant à toutes les conditions imposées aux $\vec{\omega\Sigma_i}$.

Les raisonnements précédents s'appliquant d'ailleurs à un tétraèdre (T) quelconque, nous arrivons à la conclusion géométrique suivante :

Si les vecteurs déterminés par un point ω et les sommets $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$ d'un tétraèdre (Θ) sont parallèles aux hauteurs d'un tétraèdre donné (T) (de même sens), égaux à leurs inverses, chaque distance β du tétraèdre (Θ) est égale à l'inverse de la distance α de mêmes indices du tétraèdre (T).

§. *Réciprocité de la transformation (T, Θ).* — Prenons le transformé par polaires réciproques de (T) relativement à une sphère ayant pour centre le point O, centre de gravité de (T), et pour rayon $\frac{1}{2}$; nous obtenons précisément un tétraèdre ($\bar{\Theta}$) égal à (Θ), le point ω coïncidant avec O lui-même. Si maintenant nous opérons sur ($\bar{\Theta}$), comme nous venons d'opérer sur (T), nous obtiendrons, d'après la propriété bien connue des transformations par polaires réciproques, le tétraèdre (T) lui-même. Si donc on appelle (b) les longueurs qui ont pour définitions dans (T) les défi-

(1) Cette remarque prouve en particulier que ces quatre vecteurs ont une résultante nulle, ce qui est bien connu.

Ce dernier point s'aperçoit d'une façon très intuitive, comme veut bien me le faire remarquer M. Bricard, en considérant les quatre vecteurs comme les résultantes pour les quatre faces d'une pression uniforme sur toute l'aire du tétraèdre, ou encore, si l'on ne veut pas invoquer de raisons d'hydrostatique, en utilisant l'identité vectorielle évidente :

$$u\Lambda v + v\Lambda w + w\Lambda u + (v-u)\Lambda(v-w) = 0.$$

nitions mêmes des (β) dans (Θ) , et (α) les longueurs qui ont pour définitions dans (Θ) les définitions mêmes des (a) dans (T) , le résultat du numéro précédent entraîne le suivant :

Chaque distance (b) du tétraèdre (T) est égale à l'inverse de la distance (α) de mêmes indices du tétraèdre (Θ) .

6. Si la sphère par rapport à laquelle est faite la transformation par polaires réciproques a un rayon R quelconque, le tétraèdre $(\bar{\Theta}')$ obtenu est homothétique à $(\bar{\Theta})$: la même transformation appliquée à $(\bar{\Theta}')$ donne évidemment (T) lui-même. En désignant par des lettres grecques accentuées les longueurs de $(\bar{\Theta}')$ homologues aux longueurs de $(\bar{\Theta})$ que nous avons introduites, on voit que les produits de chaque longueur a par la longueur β' de mêmes indices, et ceux de chaque longueur b par la longueur α' de mêmes indices sont tous égaux. Dans les résultats qui précèdent sont contenus implicitement plusieurs énoncés géométriques simples que l'on pourra retrouver par une étude directe. En voici deux à titre d'exemple :

Si les médianes $(^1)$ d'un tétraèdre sont parallèles aux hauteurs d'un autre tétraèdre, les médianes du second sont parallèles aux hauteurs du premier et les huit produits que l'on peut former avec une médiane de l'un et la hauteur correspondante de l'autre sont tous égaux.

K étant une constante donnée, et (T) un tétraèdre pour lequel on représente par b_i^h la distance d'un

(¹) Droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.

sommet (i ou h) au plan passant par le centre de gravité et les autres sommets, construisons le tétraèdre (Θ) dont les arêtes sont mesurées par les quantités $\frac{K^2}{b_i^2}$; le tétraèdre déduit de (Θ) comme Θ a été déduit de (T) (avec la même valeur de la constante K) est précisément le tétraèdre (T).