

Concours d'agrégation de 1923

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 107-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__107_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGREGATION DE 1925.

Mathématiques élémentaires.

Sur les côtés d'un triangle ABC , pris comme diagonales, on construit, dans le plan du triangle, les carrés $CPBP'$, $AQCQ'$, $BRAR'$. Les notations sont choisies de telle sorte que les sens de parcours, marqués par l'ordre indiqué par les sommets, correspondent au sens de rotation ABC .

I. *On considère la figure constituée par l'ensemble des neuf points $A, B, C, P, Q, R, P', Q', R'$, et par les segments qui ont pour extrémités deux quelconques d'entre eux. Montrer qu'à chacun de ces segments, on peut en associer au moins un autre qui lui soit égal; comparer les directions des segments associés.*

Montrer que les segments QR et $Q'R'$ sont vus du

milieu de BC sous un angle droit; que QR' et RQ' concourent au pied de la hauteur issue de A sur BC, que les triangles ABC, PQR, P'Q'R' ont même centre de gravité.

II. *On n'étudiera, dans tout ce qui suit, que des triangles T(ABC) auxquels correspondent trois points P, Q, R alignés. Indiquer comment on peut construire de tels triangles.*

La condition imposée peut se traduire, soit par une relation $f(a^2, b^2, c^2) = 0$, entre les longueurs des côtés, soit par une relation entre la surface et la somme des carrés des côtés, soit par une relation symétrique entre les cotangentes des angles du triangle. On établira ces relations.

III. a. *Les sommets B et C étant donnés, trouver le lieu de A et l'enveloppe de Q'R';*

b. *A et P étant donnés, trouver les lieux de B, C, P', Q', R' et les enveloppes des côtés de P'Q'R';*

c. *Q' et R' étant donnés, trouver les lieux de A, B, C, P, Q, R, l'enveloppe de la droite PQR et les enveloppes des cotés de T.*

IV. *Montrer que les nombres a, b, c qui vérifient la relation $f(a^2, b^2, c^2) = 0$, obtenue dans la deuxième partie, ne sont jamais simultanément des nombres entiers.*

On posera

$$a^2 = x, \quad b^2 = y, \quad c^2 = z, \\ \gamma + z - x = 2X^2, \quad z + x - y = 2Y^2, \quad x + y - z = 2Z^2 \\ (0 \leq X \leq Y \leq Z).$$

Trouver la relation qui existe entre X, Y, Z.

Démontrer que si x, y, z sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble X, Y, Z sont entiers et premiers entre eux deux à deux.

Déduire de là le moyen d'obtenir toutes les solutions en nombres entiers de l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

SOLUTION

Par Jean DOLLON.

1. Le sens de rotation du triangle ABC sera dans toute la suite, pour fixer les idées, le sens trigonométrique.

En ce qui concerne la première partie du problème, nous nous bornerons à quelques indications essentielles, à l'aide desquelles le lecteur trouvera facilement la réponse à toutes les questions posées.

a. Démontrons d'abord que les quadrilatères tels que AQP'R et AQ'PR' sont des parallélogrammes.

Soit par exemple le premier. On passe de Q à C par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point $\frac{A+C}{2}$ ⁽¹⁾;

(1) Nous employons la notation $\frac{A+C}{2}$ pour désigner le milieu de AC. Cette notation peut être justifiée de la façon suivante : Soient B' le milieu de AC et O un point quelconque, on a toujours l'égalité géométrique

$$2\vec{OB'} = \vec{OA} + \vec{OC} \quad \text{ou} \quad \vec{OB'} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}).$$

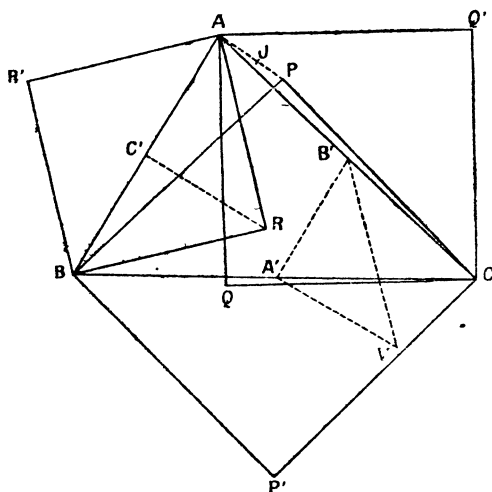
Puisque O est arbitraire, on peut se permettre de schématiser cette égalité sous la forme

$$B' = \frac{A+C}{2}.$$

On justifierait de même la notation $\frac{A+B+C}{3}$ utilisée plus loin pour désigner le centre de gravité du triangle ABC.

on passe de même de C à P' par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour du point $\frac{B+C}{2}$. On passe donc directement de Q à P' par une translation qu'on peut déterminer ainsi : on considère le point $\frac{A+C}{2}$, il est invariant dans la première rotation, on lui applique la seconde et l'on a en $\overrightarrow{AV}$ (fig. 1) le vecteur de la translation. Ce vecteur est évidemment équipollent à AR.

Fig. 1.



Remarques. — 1. La première des rotations considérées change A en Q. la seconde change donc Q en R : le point R se déduit de Q par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\frac{B+C}{2}$.

2. Les deux parallélogrammes AQRP' et AQ'R'P' sont égaux et ont les côtés homologues rectangulaires.

Les diagonales homologues, telles que AP et QR sont donc égales et portées par des droites rectangulaires : on passe du sens $\overrightarrow{QR}$ au sens $\overrightarrow{PA}$ par une rotation d'un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$.

b. Nous allons montrer maintenant que QR' et RQ' se coupent au pied de la hauteur abaissée de A.

En effet, du triangle ABC on déduit :

AR'Q par une similitude $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right)$ de centre A;

AQ'R par une similitude $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{\pi}{4}\right)$ de centre A.

Par le pied H de la hauteur issue de A, menons maintenant deux droites inclinées de $\frac{\pi}{4}$ sur BC; ce sont les transformées de BC dans les similitudes précédentes, c'est-à-dire QR' et RQ'.

c. Les triangles ABC, PQR, P'Q'R' ont même centre de gravité. En effet l'existence, établie au début, de parallélogrammes tels que AQPR' entraîne que $\frac{Q+R}{2} = \frac{A+P'}{2}$, etc.

On a donc

$$\frac{Q+R}{2} + \frac{R+P}{2} + \frac{P+Q}{2} = \frac{A+P'}{2} + \frac{B+Q'}{2} + \frac{C+R'}{2},$$

$$\frac{Q'+R'}{2} + \frac{R'+P'}{2} + \frac{P'+Q'}{2} = \frac{A+P}{2} + \frac{B+Q}{2} + \frac{C+R}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{A+B+C}{3} = \frac{P+Q+R}{3} = \frac{P'+Q'+R'}{3}.$$

On verrait aisément, du reste, que la droite qui

joint, par exemple, Q' au milieu de BQ (et qui est l'une des médianes du triangle P'Q'R') et la droite joignant A au milieu de BC se coupent aux deux tiers de leur longueur à partir des sommets.

II. Nous supposons désormais le triangle ABC tel que les points P, Q, R soient alignés. Si ces points sont deux à deux distincts, l'un d'eux est compris entre les deux autres et nous pouvons toujours supposer, pour faire la figure, que ce soit le point R ⁽¹⁾.

Ceci posé, supposons donnés P, Q, R et proposons-nous de construire le triangle ABC. Il suffit (I, remarque 2) de prendre $\overrightarrow{PA}$ de même longueur que $\overrightarrow{QR}$ et faisant avec lui un angle de $\frac{\pi}{2}$; $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$ s'obtiennent de même à partir de $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{PQ}$ et le lecteur vérifiera sans peine que le triangle ABC ainsi *déterminé* répond bien à la question.

Indiquons aussi une construction, qui présente quelque intérêt pour la suite, des milieux A', B', C', des côtés du triangle ABC. Nous avons vu (I, remarque 1) que l'on passe de R à Q par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de A' : A' est donc l'un des sommets du carré construit sur RQ pour diagonale et l'on obtient de façon analogue B' et C' (*fig. 2*). On voit immédiatement sur la figure que PA', QB', RC' sont bien respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle ABC et de longueur moitié. Posons maintenant

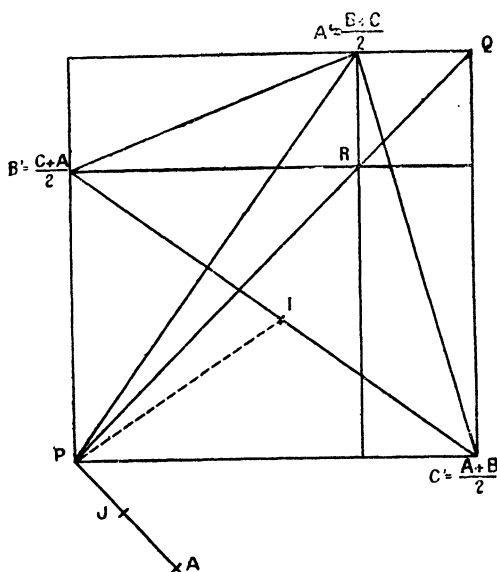
$$RQ = \frac{X}{\sqrt{2}}, \quad PR = \frac{Y}{\sqrt{2}}, \quad PQ = \frac{Z}{\sqrt{2}};$$

(1) Il suffit de choisir convenablement les notations.

les carrés des côtés du triangle ABC valent respectivement

$$(1) \quad \begin{cases} a^2 = Y^2 + Z^2, \\ b^2 = Z^2 + X^2, \\ c^2 = X^2 + Y^2, \end{cases}$$

Fig. 2.



et l'on a d'autre part

$$(2) \quad Z = X + Y.$$

On tire des relations (1)

$$(1') \quad \begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 = 2X^2, \\ c^2 + a^2 - b^2 = 2Y^2, \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2Z^2, \end{cases}$$

et, pour trouver la relation entre a^2 , b^2 , c^2 , il suffira de

porter ces valeurs de X^2 , Y^2 , Z^2 dans la relation

$$(X + Y + Z)(X + Y - Z)(Y + Z - X)(Z + X - Y) = 0,$$

qui doit être substituée à (2) en l'absence de toute hypothèse sur la disposition des points P, Q, R et sur le signe de X, Y, Z.

Cette dernière relation s'écrit encore

$$(3) \quad X^4 + Y^4 + Z^4 - 2(Y^2 Z^2 + Z^2 X^2 + X^2 Y^2) = 0,$$

et une simple substitution donne

$$f(a^2, b^2, c^2) \equiv 5(a^4 + b^4 + c^4) - 6(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = 0,$$

relation à laquelle un calcul facile permet encore de substituer

$$8S = a^2 + b^2 + c^2,$$

S étant l'aire du triangle ABC.

Il est d'ailleurs aisé de trouver une relation simple entre les cotangentes des angles du triangle ABC. Ces angles sont égaux à ceux que forment les droites PA', QB', RC' prises deux à deux. Or, sur la figure 2, on évalue immédiatement les coefficients angulaires des droites en question dans le système d'axes PC', PB'. De la formule donnant la tangente trigonométrique d'une différence d'angles, on déduit tang A, tang B, tang C, et l'on trouve

$$\cot A + \cot B + \cot C = 2.$$

Cas particulier. — Tout triangle rectangle isocèle est évidemment un triangle T, deux des points PQR étant confondus.

III. Certains éléments sont variables, l'ordre des points P, Q, R sera variable. Il va sans dire que nous renonçons à toute hypothèse concernant cet ordre.

1° *Supposons B et C donnés.* — Il en sera de même de P et de A' (milieu de BC). En se reportant à la figure 2 on voit que, si I est le milieu de B'C', on a

$$PI = \frac{B'C'}{2} = \frac{PA'}{2} = \text{const.}$$

Le lieu de I est donc un cercle de centre I, de rayon $\frac{PA'}{2}$. Le lieu du point A s'en déduit par une homothétie de centre A', de rapport 2 : c'est un cercle passant par P et par les deux sommets, autres que B et C, du carré construit sur BC.

La droite Q'R' passe par le milieu J de AP et est perpendiculaire à AP' (*fig. 1*); mais le lieu de J se déduit du lieu de A par une homothétie de centre P et de rapport $\frac{1}{2}$, JA' parallèle à AP' est également perpendiculaire à Q'R'. L'enveloppe de cette dernière droite est donc une hyperbole de foyer A', le lieu de J étant le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.

2° *Supposons A et P donnés.* — La droite PQR, perpendiculaire à AP, est fixe. Pour obtenir le lieu de B on fera subir à la droite PQR une similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, le lieu de C s'obtient par une similitude analogue, d'angle $+\frac{\pi}{4}$.

Les lieux de B et C sont donc des droites dont la construction est immédiate. Les points Q' et R' se déduisent de Q et R par une rotation de centre A, d'angle $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Les lieux de Q' et R' sont donc des droites qui se déduisent de la droite PQR par l'une ou l'autre des deux rotations mentionnées.

Enfin le lieu de P' sera la droite homothétique de la

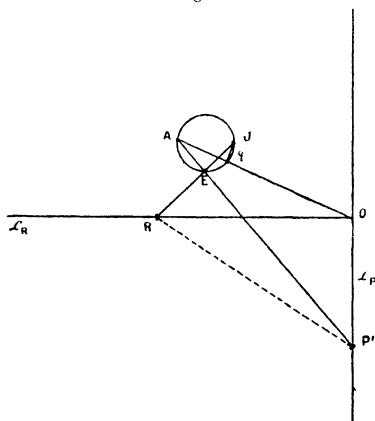
droite PQR, A étant le centre et 2 le rapport d'homothétie.

L'enveloppe de la droite Q'R' se réduit au point J, milieu de AP.

Cherchons l'enveloppe de la droite P'R'. Les droites JR' et AP', passant par les points fixes J et A, sont constamment rectangulaires; elles déterminent donc des divisions semblables sur les droites L_R et L_P (elles-mêmes rectangulaires) lieux respectifs de R' et P'. L'enveloppe de P'R' est donc une parabole tangente à L_R et L_P .

Établissons ce résultat par une voie plus élémentaire. Le lieu du point E (*fig. 3*) est le cercle de dia-

Fig. 3.



metre AJ qui peut être considéré comme inverse, par rapport à A, de L_P . On a donc

$$\overline{AE} \cdot \overline{AP'} = \text{const.} = A\varphi \cdot AO$$

et le cercle circonscrit au quadrilatère EOP'R' passe par le point fixe φ . Il suffit alors d'envisager la droite

de Simson relative au point φ du triangle $OR'P'$ pour voir que φ est le foyer d'une parabole tangente à $P'R'$, L_P et L_R . On raisonnerait de même pour l'enveloppe de la droite $P'Q'$.

3° *Supposons donnés Q' et R' .* — On connaît le point J , milieu de $Q'R'$. D'autre part, AP' étant égal et perpendiculaire à $Q'R'$ (1) la droite qui joint les points $J = \frac{A+P}{2}$ et $A' = \frac{P+P}{2}$ sera perpendiculaire à $Q'R'$ et égale à $\frac{Q'R'}{2}$. Le point A' est donc connu.

La droite PQR passe évidemment (fig. 2) par le milieu K de JA' . Son enveloppe se réduit donc à ce point et, l'angle en P étant droit, le lieu du point P est la circonférence de diamètre JK .

Le lieu de A s'en déduit par une symétrie de centre J . Enfin on passe du lieu de A aux lieux de B et C par rotation de $\mp \frac{\pi}{2}$ autour de R' et Q' respectivement et l'on passe du lieu de A aux lieux de R et Q par des similitudes $\left(\sqrt{2}, \mp \frac{\pi}{4}\right)$ de centre R' et Q' .

Il reste à trouver les enveloppes des côtés du triangle T . Soit AB un côté de ce triangle qui rencontre en C' la perpendiculaire abaissée de R' sur lui. Le lieu de $C' = \frac{A+B}{2}$ est un cercle déduit du lieu de A par une similitude $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right)$ de centre R' . L'enveloppe de AB est donc une hyperbole de foyer R' , le cercle décrit sur l'axe transverse étant le lieu de C' . L'enveloppe de AC sera de même une hyperbole ayant Q' pour foyer. L'enveloppe de BC se réduit au point A' .

IV. Il s'agit d'abord de vérifier que l'équation

$$f(a^2, b^2, c^2) \equiv 5(a^4 + b^4 + c^4) - 6(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0$$

qui peut aussi s'écrire

$$5(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 16(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0$$

ne peut être satisfaite par des valeurs, *toutes entières*, de a, b, c .

L'équation étant homogène, il suffit de démontrer qu'elle n'a pas de solutions en nombres entiers *premiers dans leur ensemble* puisqu'on se ramènerait toujours à ce cas en mettant en facteur la quatrième puissance du plus grand commun diviseur de a, b, c .

Soient donc a, b, c trois entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Je dis que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est jamais multiple de 4. En effet, a, b, c sont forcément non tous pairs, d'après l'hypothèse faite; si un seul de ces trois nombres est impair, ou bien s'ils le sont tous, $a^2 + b^2 + c^2$ sera un nombre impair; si enfin deux des entiers a, b, c sont impairs, nous aurons, par exemple,

$$a = 2a', \quad b = 2b' + 1, \quad c = 2c' + 1,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4(a'^2 + b'^2 + c'^2 + b' + c') + 2 = \text{mult. } 4 + 2.$$

L'impossibilité de $f = 0$ en nombres entiers premiers dans leur ensemble en résulte. Admettons en effet un instant qu'on puisse trouver 3 entiers a, b, c tels que $f = 0$; puisque 16 est premier avec 5, il diviserait $(a^2 + b^2 + c^2)^2$. Donc 4 diviserait $a^2 + b^2 + c^2$, ce qui, d'après le lemme précédent, est impossible.

Posons, comme il est indiqué dans l'énoncé,

$$\begin{aligned} a^2 &= x, & b^2 &= y, & c^2 &= z, \\ \left\{ \begin{array}{l} y + z - x = 2X^2, \\ z + x - y = 2Y^2, \\ x + y - z = 2Z^2, \end{array} \right. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{cases} x = Y^2 + Z^2, \\ y = Z^2 + X^2, \\ z = X^2 + Y^2, \end{cases}$$

et supposons

$$0 \leq X \leq Y \leq Z;$$

entre X, Y, Z on a la relation

$$Z = X + Y.$$

Supposons que x, y, z soient entiers et premiers entre eux dans leur ensemble et satisfassent à

$$f(x, y, z) = 0.$$

Je dis que X, Y, Z seront entiers et premiers entre eux deux à deux. En effet la relation $f = 0$ est le résultat de l'élimination de X, Y entre les équations

$$(E) \quad \begin{cases} x = Y^2 + (X + Y)^2 = X^2 + 2XY + 2Y^2, \\ y = X^2 + (X + Y)^2 = 2X^2 + 2XY + Y^2, \\ z = X^2 + Y^2. \end{cases}$$

Les équations (E) sont résolubles en X^2, XY, Y^2 :

$$\begin{cases} 2X^2 = y + z - x, \\ 2Y^2 = z + x - y, \\ 4XY = x + y - 3z \end{cases}$$

et l'on peut écrire $f = 0$ sous la forme

$$4(y + z - x)(z + x - y) = (x + y - 3z)^2;$$

mais $y + z - x$ et $z + x - y$ sont de même parité, de même $z + x - y$ et $x + y - 3z$; enfin, d'après l'égalité précédente, $x + y - 3z$ est manifestement pair X^2, Y^2, XY sont donc des entiers.

D'ailleurs X^2 et Y^2 seront premiers entre eux, sans

quoi x, y, z auraient un diviseur commun : en effet, si X^2 et Y^2 avaient un diviseur commun δ , δ^2 diviserait $X^2 Y^2$, δ diviserait XY et d'après les équations (E), il diviserait simultanément x, y, z qui, par suite, ne seraient pas premiers dans leur ensemble. Il en résulte que X et Y sont entiers : en effet, décomposons X^2, Y^2, XY en facteurs premiers

$$\left\{ \begin{array}{l} X^2 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \\ Y^2 = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n}, \\ XY = u_1^{\gamma_1} u_2^{\gamma_2} \dots u_n^{\gamma_n}, \end{array} \right.$$

X^2 et Y^2 n'ayant pas de facteur commun

$$(XY)^2 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n} = u_1^{2\gamma_1} u_2^{2\gamma_2} \dots u_n^{2\gamma_n}.$$

De l'identité des deux décompositions, on déduit la parité des α et des β . X et Y sont donc entiers, et comme

$$Z = X + Y,$$

Z est un entier premier à X et à Y .

Les solutions en nombres entiers premiers dans leur ensemble de l'équation $f(x, y, z) = 0$ sont donc fournies par les équations (E) où X et Y sont des entiers premiers entre eux. On passe à la solution générale en substituant, aux valeurs x, y, z définies par (E), les valeurs kx, ky, kz , k étant un entier quelconque.

Autre solution par M. FAUCHEUX.

