NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIOCHE

Sur les coniques focales

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 62-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__62_0>

[L²9a]

SUR LES CONIQUES FOCALES;

PAR M. CH. BIOCHE.

A propos de diverses questions de géométrie, on est amené à considérer un système de deux coniques, situées dans des plans rectangulaires, et telles que chacune d'elles ait pour sommets les foyers de l'autre; on les appelle quelquefois *coniques focales*. C'est d'un pareil système qu'il s'agit ici.

1. Si l'on désigne par $2a$ le grand axe, par $2c$ la distance des foyers de l'ellipse, et par $2b$ l'axe non focal, l'hyperbole correspondante a pour axe transverse $2c$, pour distance des foyers $2a$ et pour axe non transverse $2b$.

Il résulte de là que, si l'on projette ces deux coniques sur un plan P passant par l'axe commun et faisant un angle α avec le plan de l'ellipse, l'ellipse obtenue aura pour demi-axes a et $b\cos\alpha$, et l'hyperbole aura pour demi-axes c et $b\sin\alpha$. On en déduit facilement que le carré de la demi-distance des foyers est pour chacune des coniques $a^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha$. Donc ces coniques sont homofocales.

Il est facile de constater que la demi-distance focale commune varie de c à a, quand α varie de o à $\frac{\pi}{2}$.

2. Réciproquement, soient deux coniques homofocales

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{c^2 - d^2} = 1.$$

Si l'on considère un plan P passant par OX et faisant l'angle α avec le plan des courbes données, l'ellipse peut être considérée comme la projection d'une ellipse de P dont les demi-axes auraient pour carrés

$$a^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2 - c^2}{\cos^2 \alpha}.$$

L'hyperbole peut aussi être considérée comme la projection d'une hyperbole, située dans le plan P' perpendiculaire à P, les carrés des demi-axes seraient pour cette hyperbole

$$d^2 \quad \text{et} \quad \frac{c^2 - d^2}{\sin^2 \alpha}.$$

On peut disposer de α de façon que les coniques obtenues dans les plans P et P'' forment un système de coniques focales; car les équations obtenues en écrivant que les foyers de l'une des coniques sont les sommets de l'autre se réduisent à une seule, qui donne

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{c^2 - d^2}{a^2 - c^2}.$$

Donc deux coniques homofocales peuvent toujours être considérées comme les projections de deux coniques focales.