NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. ZAREMBA

Sur une forme remarquable de l'intégrale de l'équation des cordes vibrantes

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 330-338

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__330_0>

[H10e]

SUR UNE FORME REMARQUABLE DE L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION DES CORDES VIBRANTES;

PAR M. S. ZAREMBA.

1. On entend par équation des cordes vibrantes l'équation aux dérivées partielles suivante

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

où a représente une constante qui peut évidemment être regardée comme positive. Les circonstances dans lesquelles cette équation célèbre se présente en acoustique sont assez connues pour que nous puissions nous dispenser d'insister sur ce sujet, en nous bornant simplement à faire remarquer que, dans les applications, le problème d'intégration de cette équation se présente habituellement sous la forme suivante :

I. *Problème*. — « Déterminer l'intégrale u de l'équation (1) dans le domaine (D) défini par les relations

$$t \geq 0, \qquad 0 < x \leq l, \tag{2}$$

où l est un nombre positif donné, de façon à satisfaire aux conditions que voici :

1° Pour

$$0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

on a

$$(u)_{t=0} = f(x) \qquad \text{ainsi que} \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = f_1(x), \tag{4}$$

où $f(x)$ et $f_1(x)$ sont deux fonctions continues données, définies dans l'intervalle $(0, l)$.

2° Pour

$$(5) \qquad t > 0,$$

on a

$$(6) \qquad (u)_{x=0} = \varphi(t) \qquad \text{ainsi que} \qquad (u)_{x=l} = \psi(t),$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont deux fonctions continues données, définies pour les valeurs non négatives de la variable t. »

Une étude complète du problème précédent est faite depuis longtemps et, lorsque les données du problème satisfont aux conditions voulues pour que la solution existe, on sait former, de diverses façons, une formule propre à représenter cette solution. Toutefois, il ne semble pas que, pour la théorie du problème considéré, on ait utilisé les indications qui dérivent des recherches récentes relatives aux équations aux dérivées partielles linéaires et du deuxième ordre [1]. Or, ces indications suggèrent une marche conduisant à une formule qui, lorsque la fonction demandée existe, fait connaître cette fonction sous une forme extrêmement instructive et admirablement adaptée aux applications en Physique.

Nous nous proposons d'établir cette formule d'une façon tout à fait élémentaire.

2. Les notations du numéro précédent étant conservées, regardons x et t comme l'abscisse et l'ordonnée du point d'un plan ϖ rapporté à un système (S) de

---

[1] *Voir* en particulier : HADAMARD, *Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1904, p. 242).

coordonnées cartésiennes rectangulaires d'origine O et soit, sur l'axe des abscisses, O′ le point qui a pour abscisse le nombre l, considéré dans le problème I. Dans ces conditions le domaine (D), défini par les relations (2), aura pour image géométrique une bande (B) située dans le plan ϖ, limitée par le segment $\overline{OO'}$ et les deux demi-droites $O\mathfrak{T}$ et $O'\mathfrak{T}'$, dirigées dans le sens de l'axe des ordonnées et ayant pour origines respectives les points O et O′. Cela posé, plaçons-nous dans l'hypothèse suivante :

II. *Hypothèse.* — Le problème I est possible et, en outre, on peut faire correspondre à chacune des trois dérivées secondes de la fonction u une fonction continue dans le domaine (D) et sur la frontière de ce domaine, égale à la dérivée seconde considérée de la fonction u en tout point intérieur au domaine (D).

III. *Remarque.* — En vertu de l'hypothèse précédente, il correspondra à chacune des deux dérivées premières de la fonction u une fonction continue dans le domaine (D) et sur la frontière de ce domaine, égale, en tout point intérieur du domaine (D), à la dérivée première considérée de la fonction u.

L'hypothèse II étant adoptée, proposons-nous de calculer la fonction u pour un système de valeurs données des variables x et t; ce système de valeurs aura pour image géométrique dans le plan ϖ un certain point M. Évidemment il n'y a à considérer que le cas où le point M est situé à l'intérieur de la bande (B) puisque, s'il était situé sur la frontière de celle-ci, la valeur correspondante de la fonction u ferait partie de l'ensemble des données du problème. Construisons deux lignes polygonales MM_1M_2 et $MM'_1M'_2M'_3$ disposées comme l'indique la figure 1 et telles que tout côté de chacune d'elles soit parallèle à l'une ou à l'autre des droites

$$x - at = 0 \qquad \text{et} \qquad x + at = 0.$$

Les propriétés topographiques de la figure obtenue varieront selon que le point M sera situé à l'intérieur

Fig. 1.

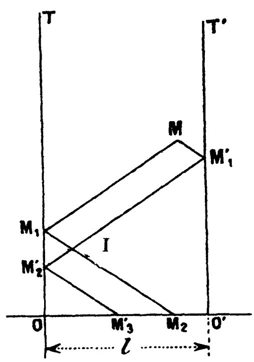
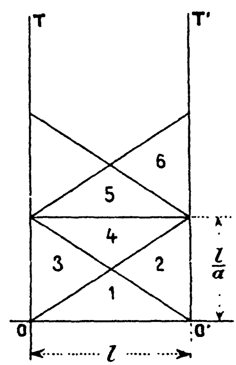


Fig. 2.



de l'une ou de l'autre des régions indiquées sur la figure 2 ou sera un point-frontière commun à certaines de ces régions; la figure 1 se rapporte au cas où le point M serait situé à l'intérieur de la région qui, sur la figure 2, porte le n° 6.

Désignons par (P) le parallélogramme $MM_1IM'_1$ et par (Q) le trapèze $IM'_2M'_3M_2$. La fonction u vérifiant l'équation (1), nous aurons les deux égalités suivantes :

$$\int\int_{(P)} \left[a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx\, dt = 0,$$

$$\int\int_{(Q)} \left[a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx\, dt = 0.$$

En transformant les intégrales doubles précédentes par le théorème de Green, on trouve :

$$\int_{(\mathrm{MM_1IM'_1M})} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial t} dx\right] = 0, \tag{7}$$

$$\int_{(\mathrm{IM_2M'_3M_2I})} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial t} dx\right] = 0, \tag{8}$$

où les intégrales du premier membre sont prises dans le sens direct suivant le contour du parallélogramme $\mathrm{MM_1IM'_1}$ et du trapèze $\mathrm{IM'_2M'_3M_2}$.

Pour calculer les intégrales précédentes, considérons un segment AB situé dans la bande (B) sur une droite représentée par une équation de la forme

$$x = \varepsilon a t + \text{const.}, \tag{9}$$

où ε est une constante vérifiant l'équation

$$\varepsilon^2 = 1,$$

et envisageons l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_{\overline{\mathrm{AB}}} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial t} dx\right]. \tag{10}$$

prise suivant le segment $\overline{\mathrm{AB}}$ de A a B.

En vertu de (9), la formule (10) donne

$$\begin{aligned} \mathrm{J} &= \int_{t_A}^{t_B} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t}\right] dt \\ &= \varepsilon a \int_{t_A}^{t_B} \left[\varepsilon a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right] dt, \end{aligned} \tag{11}$$

où t_A et t_B sont les valeurs de t qui correspondent aux points A et B.

Représentons par $\frac{du}{dt}$ la dérivée par rapport à t de la fonction de t que devient la fonction u quand on y regarde la variable x comme la fonction de t définie par la formule (9).

Nous aurons

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Donc, la formule (11) donne

$$J = \varepsilon a[u(B) - u(A)],$$

où $u(A)$ et $u(B)$ représentent les valeurs de la fonction u en A et B respectivement.

Cela posé, en se reportant à (10), on constate en définitive que l'on a

$$\int_{\overline{AB}} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial t} dx\right] = \varepsilon a[u(B) - u(A)]. \tag{12}$$

Revenons à l'intégrale (7); elle est égale à la somme de quatre intégrales prises respectivement suivant les segments

$$\overline{MM_1},\quad \overline{M_1 I},\quad \overline{IM'_1},\quad \overline{M'_1 M}.$$

En s'appuyant sur le lemme exprimé par l'égalité (12), on trouve pour les quatre intégrales précédentes, les expressions suivantes :

$$a[u(M_1) - u(M)],\quad -a[u(I) - u(M_1)],$$
$$a[u(M'_1) - u(I)],\quad -a[u(M) - u(M'_1)].$$

Par conséquent, l'égalité (7) nous donne

$$2a[u(M_1) - u(M) - u(I) + u(M'_1)] = 0,$$

d'où

$$u(M) = u(M_1) + u(M'_1) - u(I). \tag{13}$$

Passons à l'intégrale (8); elle est égale à la somme de quatre intégrales dont chacune est prise suivant un segment rectiligne; trois de ces intégrales pourront être calculées au moyen du lemme (12), la quatrième, prise suivant le segment $M'_3 M_2$, étant égale à

$$\int_{x'_3}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} dx,$$

où x'_3 et x_2 représentent les abscisses des points M'_3 et M_2; la condition (4) permet de mettre l'intégrale précédente sous la forme

$$\int_{x'_3}^{x_2} f_1(x)\, dx.$$

Ces remarques faites, on reconnaît de suite que l'égalité (8) nous fournit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} a[u(M'_2) - u(I)] - a[u(M'_3) - u(M'_2)] \\ + \int_{x'_3}^{x_2} f_1(x)\, dx - a[u(I) - u(M_2)] = 0. \end{aligned}$$

En portant la valeur de $u(I)$, tirée de cette équation, dans la formule (13), on trouve

$$\begin{aligned} u(M) = u(M_1) + u(M'_1) - u(M'_2) + \\ - \frac{1}{2}[u(M_2) - u(M'_3)] - \frac{1}{2a}\int_{x'_3}^{x_2} f_1(x)\, dx. \end{aligned}$$

Désignons par t_1, t'_1 et t'_2 les ordonnées respectives des points M_1, M'_1 et M'_2, rappelons-nous que x_2 et x'_3 sont les abscisses respectives des points M_2 et M'_3 et reportons-nous aux conditions (4) et (6) que vérifie la fonction u. Nous reconnaîtrons aisément que la formule précédente pourra s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} (14)\quad u(M) = \varphi(t_1) + \psi(t'_1) - \varphi(t'_2) + \\ - \frac{1}{2}[f(x_2) - f(x'_3)] - \frac{1}{2a}\int_{x'_3}^{x_2} f_1(x)\, dx. \end{aligned}$$

Le second membre de l'équation précédente ne contient que des éléments connus car, connaissant les coordonnées du point M, on calculera avec la plus grande facilité les nombres t_1, t'_1, t_2, x_2 et x'_3,

Par conséquent, la formule (14) fait connaître la fonction u (quand elle existe) dans la région qui porte le n° 6 dans la figure 2.

Il est évident d'ailleurs que l'on établirait d'une façon analogue la formule faisant connaître la fonction u dans n'importe laquelle des autre régions marquées dans la figure 2. Ces formules permettraient, au moyen d'une discussion très facile, de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes que devraient vérifier les données pour que le problème I admette une solution vérifiant l'hypothèse II. Mais ce qui fait l'intérêt de ces formules est autre chose. Tout d'abord la formule (14) nous apprend que la valeur $u(\mathrm{M})$ de la fonction u en M dépend non pas des données relatives à toute la frontière du domaine (D), mais seulement de celles qui se rapportent à une partie de cette frontière, partie nettement mise en évidence dans la formule considérée et variant avec la position du point M. La formule (14), et les formules analogues relatives aux autres régions indiquées dans la figure 2, sont encore intéressantes parce qu'elles nous apprennent comment une discontinuité d'une dérivée d'un certain ordre de l'une des fonctions données ou la non-existence de certaines relations entre les dérivées unilatérales de ces fonctions en l'un des points O ou O' donne lieu à des lignes de discontinuité pour les dérivées d'un certain ordre de la fonction u, ces lignes étant toujours des lignes polygonales dont les sommets et les extrémités sont des points-frontière du domaine (D), les côtés de ces lignes étant des segments dont chacun est parallèle à l'une ou à l'autre des droites

$$x - at = 0 \quad \text{et} \quad x + at = 0.$$

Le développement de ces remarques et leur interprétation physique demanderait plus de place que nous n'en disposons, mais nous croyons que le lecteur y suppléera lui-même sans trop grand effort. J'ajoute que la méthode exposée ci-dessus est applicable au cas où le domaine dans lequel l'équation (1) doit être intégrée est beaucoup plus général que celui que nous avons considéré.