

J. HAAG

Sur un invariant intégral se rattachant à la mécanique statistique

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1
(1922), p. 301-302

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__301_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R8]

SUR UN INVARIANT INTÉGRAL
SE RATTACHANT A LA MÉCANIQUE STATISTIQUE ;

PAR M. J. HAAG.

Soit un système matériel dépendant de n paramètres indépendants $q_1, q_2, \dots, q_n$. Soit T son énergie cinétique, forme quadratique des dérivées $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$, par rapport au temps. Posons

$$(1) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En Mécanique statistique, on représente les différents états possibles du système par les points de l'espace E_{2n} ayant pour coordonnées $(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$, et l'on considère la probabilité pour qu'un état pris au hasard ait son point représentatif P situé dans un domaine donné comme proportionnel au volume V de ce domaine (cf. JEANS, *The dynamical theory of gases*, Chap. V). Pour qu'une telle hypothèse soit légitime, il faut évidemment qu'elle soit indépendante du choix des variables q_i . Autrement dit, si l'on fait un changement de variables quelconque

$$(2) \quad y_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et si l'on pose

$$(3) \quad x_i = \frac{\partial T}{\partial y'_i},$$

le point Q de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ doit décrire un volume V' égal au volume V ,

quand P décrit V. C'est ce que je me propose de vérifier dans cette courte Note.

Il s'agit de prouver que le jacobien

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)}$$

est égal à l'unité.

Remarquons d'abord que les y ne sont pas fonctions des p ; donc, les éléments de J qui sont communs aux n dernières lignes et aux n premières colonnes sont nuls. Il s'ensuit que J est le produit des deux déterminants d'ordre n :

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(p_1, p_2, \dots, p_n)}, \quad J' = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(q_1, q_2, \dots, q_n)}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$a_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}.$$

On a

$$y'_i = \sum_k a_{ik} q'_k;$$

d'où, en résolvant par rapport aux q' et désignant par A_{ik} le coefficient de a_{ik} dans le développement de J'' ,

$$(4) \quad q'_i = \frac{\sum A_{ki} y'_k}{J''}.$$

Nous avons maintenant

$$(5) \quad x_i = \frac{\partial T}{\partial y'_i} = \sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial y'_i} = \sum_k \frac{A_{ik}}{J''} p_k.$$

Dès lors, on voit que J' est égal au déterminant adjoint de J'' , divisé par J''^n ; donc,

$$J' = \frac{J''^{n-1}}{J''^n} = \frac{1}{J''}.$$

D'où, $J = 1$.

C. Q. F. D.