Certificat de physique mathématique

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 234-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__234_1>

CERTIFICAT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *La loi de répartition canonique. On démontrera que c'est la loi de répartition la plus probable dans l'extension en phase de* N *systèmes dont l'énergie totale est fixée. Le nombre* N *est supposé très grand.*

II. *En déduire la relation de Boltzmann entre l'entropie et la probabilité.*

III. *Signification physique des coefficients de la loi de répartition canonique.*

IV. *Généraliser les raisonnements précédents au cas où les équations de la mécanique ne sont plus valables.*

On supposera que, dans ce cas, la probabilité pour que le point représentatif d'un système se trouve dans l'extension en phase $d\Phi$ soit égale à $\varphi\, d\Phi$.

φ est une fonction des coordonnées et des moments définissant la position de l'élément d'extension en phase $d\Phi$,

fonction qu'on laissera indéterminée. (***Elle se réduit à une constante dans la première partie de la question.***)

FORMULES. — *Première partie.* — Probabilité d'une répartition telle que n_1 systèmes se trouvent dans l'élément d'extension en phase $d\Phi_1$, n_2 dans $d\Phi_2$, ..., n_m dans $d\Phi_m$,

$$(1) \qquad P = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!};$$

la formule de Stirling

$$(2) \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donne, en négligeant les grandeurs petites,

$$(3) \qquad \log P = \text{const.} - \sum n \log n.$$

On partira de la formule (3).

Quatrième partie. — La formule (1) doit être remplacée par

$$(1') \qquad P = \varphi_1^{n_1} \varphi_2^{n_2} \ldots \varphi_m^{n_m} \frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!}.$$

On en déduira la formule

$$(3') \qquad \log P = \text{const.} - \sum n(\log n - \log \varphi + 1).$$

On remplacera la sommation par une intégration et l'on cherchera la répartition la plus probable.

Pour établir la relation de Boltzmann, on supposera l'extension en phase permise invariable.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On rappelle que les polynomes de Legendre* (*n entier* > 0) *sont définis par la formule*

$$(1) \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2 - 1)^n.$$

Il est évident qu'un polynome *entier en* μ, *de degré* p, *peut être exprimé comme une combinaison linéaire de* P_0, P_1, ..., P_p. *On propose d'effectuer explicitement ce* *développement pour le polynome* μ^p, *sous la forme*

$$(2)\qquad \mu^p = a_0 P_0(\mu) + a_1 P_1(\mu) + \ldots + a_n P_n(\mu) + \ldots + a_p P_p(\mu).$$

1° *Déterminer* a_p *en comparant les termes en* μ^p.

2° *Calculer les autres coefficients en utilisant la formule connue*

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

On aura besoin d'effectuer des intégrales du type

$$J_{p,n} = \int_{-1}^{+1} \mu^p P_n(\mu)\, d\mu.$$

a. $J_{p,p}$ *se déduit du paragraphe* (1°) (*calcul de* a_p).

b. $J_{p,n} = 0$ *si* $p - n$ *est impair*.

c. *Pour* $p - n =$ *entier pair, former une relation de récurrence entre* $J_{p,n}$ *et* $J_{p-2,n}$, *en utilisant l'équation différentielle de Legendre :*

$$(4)\qquad \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right] + n(n+1)P_n = 0.$$

On multipliera cette équation (4) *par* μ^p, *et l'on intégrera entre* -1 *et* $+1$. *En utilisant deux fois l'intégration par parties du premier terme, on trouvera*

$$(5)\qquad n(n+1)J_{p,n} = p(p+1)J_{p,n} - p(p-1)J_{p-2,n},$$

formule qui ramènera le calcul de $J_{p,n}$ *à celui de* $J_{n,n}$.

En déduire la valeur explicite des coefficients dans la formule (2).

(Strasbourg, juin 1922.)