Nouvelles annales de mathématiques

Georges Valiron

Sur un problème particulier de variations

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 196-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__196_1>

[J3a]

SUR UN PROBLÈME PARTICULIER DE VARIATIONS;

PAR M. GEORGES VALIRON.

Considérons une intégrale de la forme

$$\text{(1)}\qquad I = \int_a^b f(x, y')\,dx$$

et supposons que l'on cherche, parmi les courbes $y = \varphi(x)$ joignant deux points, A d'abscisse a, B d'abscisse b, et ayant une tangente en chaque point, celles rendant l'intégrale minimum. En supposant que la fonction $f(x, y')$ admet des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, on trouve que les courbes Γ répondant à la question doivent vérifier l'équation d'Euler,

$$\text{(2)}\qquad \frac{\partial f}{\partial y'}(x.\,y') = k,$$

k étant une constante (voir le *Traité d'Analyse* de M. Goursat, t. III, p. 554). Il existe d'autres conditions nécessaires, notamment celle de Weierstrass (Goursat, p. 597), et l'on obtient aussi des conditions suffisantes. Je voudrais montrer rapidement ici que l'on a immédiatement, dans le cas particulier de l'intégrale (1), une condition suffisante pour le minimum, plus commode que celle de Weierstrass [et qui coïncide d'ailleurs avec la condition nécessaire lorsque $f(x, y')$ est une fonction simple].

Soit Γ une courbe extrémale joignant les deux points A, B, c'est-à-dire une courbe vérifiant l'équation d'Euler (2). Si l'on désigne par G une autre courbe $y = \psi(x)$ joignant AB et admettant une tangente dont le coefficient angulaire sera désigné par Y′, on aura

$$(3)\qquad \int_a^b (\mathrm{Y}'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y')\,dx = \int_a^b (\mathrm{Y}'-y')k\,dx = [(\mathrm{Y}-y)k]_a^b = 0$$

(y' désigne le coefficient angulaire de la tangente à Γ). La variation de l'intégrale I, lorsqu'on passe de la courbe G à l'extrémale Γ, pourra donc s'écrire sous la forme

$$\int_a^b \mathrm{E}(x, y', \mathrm{Y}')\,dx$$

en posant

$$\mathrm{E}(x, y', \mathrm{Y}') = f(x, \mathrm{Y}') - f(x, y') - (\mathrm{Y}'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y').$$

On voit qu'il suffit que, *quel que soit* Y′, *la fonction* $\mathrm{E}(x, y', \mathrm{Y}')$ *soit positive tout le long de l'arc d'extrémale* Γ *joignant* AB *pour que cet arc donne un minimum, qui est minimum absolu.*

La recherche du signe de $\mathrm{E}(x, y', \mathrm{Y}')$ se ramène à l'étude de la courbe que M. Hadamard appelle la *figurative*. On peut même, ici, introduire une *surface figurative*, ce sera la surface S dont l'équation, dans un système d'axes $Oxyz$, est

$$z = f(x, y),$$

$f(x, y')$ étant la fonction qui entre dans l'intégrale (1). En donnant à x une valeur constante, on obtient dans S une section plane C_x, qui est la figurative de M. Hadamard. Prenons sur cette courbe le point M_x tel que $y = y'$, y' étant toujours la pente de la tangente à l'extrémale Γ au point d'abscisse x; la tangente T_x à C_x au point M_x a pour équation, dans le plan C_x,

$$z - f(x, y') - (y - y')\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y') = 0.$$

L'expression $E(x, y', Y')$ est donc positive et l'est seulement si la courbe C_x est au-dessus de sa tangente T_x, et cela pour chaque point x compris entre a et b. Lorsque x varie de a à b et que y' vérifie l'équation (2) des extrémales, la direction de la tangente T_x reste fixe, parallèle à la direction Δ de pente k du plan zOy. Le point M_x décrit donc une partie du contour apparent Γ' de S parallèlement à la direction Δ. Il suffit que le long de l'arc de Γ' correspondant à l'arc Γ de l'extrémale joignant AB, le contour apparent soit le contour *apparent inférieur* (c'est-à-dire que les tangentes à S parallèles à Δ laissent la surface au-dessus d'elles), pour que l'extrémale donne un minimum absolu.

Il est clair que, en général, le contour apparent inférieur Γ'', s'il existe, sera formé de plusieurs arcs de courbes, par exemple un arc D'E sera contour apparent inférieur pour x compris entre d et e, puis un arc E'F sera contour apparent pour x compris entre e et f, la tangente T_e relative à la courbe C_e touchant cette courbe en deux points au moins. Au point $x = e$, la valeur de y' aura une discontinuité par saut brusque. A un tel contour Γ'' discontinu correspondra encore une courbe continue Γ formée d'arcs de courbes vérifiant (2) avec la même valeur de k, y' étant discontinu en un nombre fini de points. Or, il est manifeste que l'intégrale (3) reste nulle lorsque Y' et y' ont un nombre fini de discontinuités pourvu que Y et y soient continus et soient égaux pour a et b et pourvu que $\frac{\partial f}{\partial y'}$ soit constant. La courbe Γ donne donc encore le minimum absolu des intégrales I correspondant à des courbes joignant ses extrémités lorsqu'on se borne à considérer des courbes sur lesquelles y' est continu ou n'a qu'un nombre fini de discontinuités. Dans un tel cas, une courbe sur laquelle y' serait continu ne pourrait donner le minimum. On voit ainsi apparaître, bien simplement, dans le cas des intégrales de la forme (1), la nécessité où l'on se trouve d'introduire des solutions discontinues pour résoudre certains problèmes de variations.

Les abscisses a et b étant données, si pour une valeur de la constante k la courbe Γ'' existe, on pourra joindre par une courbe Γ donnant le minimum deux points A et B d'abscisses a et b, dont la différence des ordonnées est égale à

$$\int_a^b y'\,dx,$$

c'est-à-dire est l'aire σ_k de la portion du plan xOy limitée dans le système d'axes liés à S par Ox, les droites $x = a$, $x = b$, et la projection de Γ'' sur Oxy. Lorsqu'on fait varier k de $-\infty$ à $+\infty$ $\Big($ou entre les limites des valeurs dont est susceptible $\frac{\partial f}{\partial y'}$ lorsque y' satisfait aux conditions imposées par le problème$\Big)$, l'aire σ_k varie entre certaines limites. Il suffira que la différence des ordonnées de A et B soit comprise entre ces limites pour qu'on soit certain que le problème est possible.

Le lecteur appliquera aisément ces considérations au problème de Newton (Goursat, p. 658) et à des problèmes analogues.