

ÉT. DELASSUS

Exposé élémentaire d'une théorie rigoureuse des liaisons finies unilatérales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 81-93

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__81_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R8e]

**EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE D'UNE THEORIE RIGOREUSE
DES LIAISONS FINIES UNILATERALES ;**

PAR M. ET. DELASSUS ⁽¹⁾.

(Suite.)

ÉTUDE DU SOLIDE REPOSANT SUR UN PLAN FIXE PAR TROIS POINTS.

12. L'étude d'une liaison unilatérale triple conduit, comme nous l'avons vu, à la considération d'une figure de l'espace ne présentant pas la même commodité qu'une figure plane, comme celle obtenue pour une liaison unilatérale double.

On peut néanmoins, pour certaines liaisons unilatérales triples, représenter la discussion au moyen d'une figure plane. C'est ce qui arrive pour un solide reposant sur un plan fixe par un nombre quelconque de points ou par une face plane polygonale à côtés rectilignes et même à côtés curvilignes. Nous nous bornerons ici au cas le plus simple, celui de trois points de contact.

Pour arriver au résultat cherché, nous introduirons la réaction totale, qui est ici une force unique N normale au plan H , et nous considérerons son pied ω comme appartenant à la face libre ou positive H^+ si N est positive, et à la face négative H^- si N est négative. En définitive, nous considérons N comme une flèche matérielle tenue normalement au contact du plan H

⁽¹⁾ Voir même Tome, p. 1.

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XX. (Mars 1920)

réalisé matériellement par une plaque métallique. Dans ces conditions, le point ω peut parcourir l'étendue complète des deux faces de H.

Nous allons faire l'étude directe des régions de possibilité des divers mouvements, régions où doit se trouver ω , et, comme conséquence de la théorie générale, nous saurons que ces régions rempliront complètement et sans empiéter les unes sur les autres la totalité de l'espace qui est ici l'ensemble des deux faces de H.

13. La région $M_{A_1 A_2 A_3}$ est caractérisée (théorie générale) par la condition que les trois réactions partielles soient positives, donc que la réaction totale N soit positive et a l'intérieur du triangle de sustentation A_1, A_2, A_3 . Le point ω doit donc être sur H^+ et intérieur à ce triangle, de sorte que la région $M_{A_1 A_2 A_3}$ est le triangle de sustentation trace sur la face H^+ , face sur laquelle repose le solide.

14. Cherchons maintenant la région M_L . Si nous prenons des axes mobiles x, y, z attachés au solide, Gz étant perpendiculaire au plan $A_1 A_2 A_3$ et du côté positif, si nous désignons par $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, u, v$ les deux premières coordonnées des points A_1, A_2, A_3, ω , nous aurons pour équations du mouvement $M_{A_1 A_2 A_3}$ à l'instant initial,

$$M a'' = \dots, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \dots = N v + \dots,$$

$$M b'' = \dots, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q} \right) + \dots = -N u + \dots,$$

$$M c'' = N + \dots, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \dots = \dots$$

$$(c'' = p' = q' = 0)$$

et pour M_L ,

$$\begin{aligned} M a'' &= \dots, & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \dots &= 0 + \dots, \\ M b'' &= \dots, & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q} \right) + \dots &= 0 + \dots, \\ M c'' &= 0 + \dots, & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \dots &= \dots, \end{aligned}$$

avec les conditions de possibilité à l'instant initial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c' - p y_1 - q x_1) &= c'' + p' y_1 - q' x_1 > 0, \\ c'' - p' y_2 - q' x_2 &> 0, \\ c - p' y_3 - q' x_1 &> 0, \end{aligned}$$

exprimant que les trois points $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ se soulèvent du côté libre.

En faisant la soustraction des équations correspondantes et désignant par $a'', b'', c'', p', q', r'$, non plus ces quantités elles-mêmes, mais leurs variations quand on passe de $M_{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3}$ à M_L , on aura

$$\begin{aligned} M c'' &= -N, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p'} &= -N v, & \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q'} &= N u, & \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r'} &= v, \end{aligned}$$

et, en vertu de ce que c'', p', q' sont nuls dans le premier mouvement, les trois inégalités de possibilité gardent la même forme.

Si l'on appelle $\Phi(X, Y, Z)$ la forme quadratique adjointe de $F(X, Y, Z)$ et si l'on pose

$$\Theta(u, v) = \Phi(-v, u, 0),$$

on en déduira

$$\begin{aligned} p' &= N \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} (-v, u, 0) = -N \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial v}, \\ q' &= N \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} (-v, u, 0) = N \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \end{aligned}$$

de sorte que si l'on considère la forme polaire

$$\Omega(M, \omega) = x \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial u} + y \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{1}{M} = u \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{M}$$

de l'ellipse imaginaire

$$\Theta(X, Y) + \frac{1}{M} = 0,$$

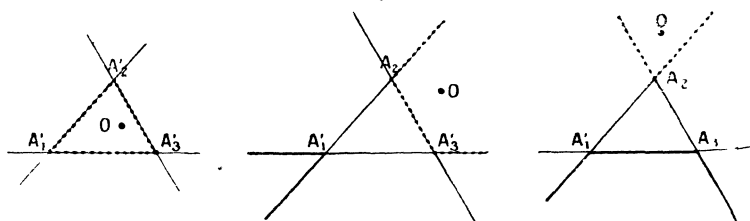
les trois conditions de possibilité prendront la forme simple

$$N\Omega(A_1, \omega) < 0, \quad N\Omega(A_2, \omega) < 0, \quad N\Omega(A_3, \omega) < 0.$$

Si $N < 0$, elles indiquent que ω est sur H^- dans la région commune aux côtes positifs des polaires de A_1, A_2, A_3 , région commune existant forcément et contenant le point $O(0,0)$ qui donne le signe *plus* dans la polaire d'un point quelconque. Si $N > 0$, elles indiquent que ω est sur H^+ dans la région commune aux côtes négatifs des trois polaires, région qui peut, suivant les cas, exister ou ne pas exister.

Si nous convenons de représenter en traits pleins, comme choses vues, ce qui est sur H^+ et en traits ponctués, comme choses cachées, ce qui est sur H^- , nous aurons les trois figures suivantes (fig. 1) qui

Fig. 1.



montrent que le pôle A'_1 d'un côté A_2A_3 doit être considéré comme appartenant à H^- s'il est du côté O de $A'_2A'_3$ polaire de A_1 ; c'est-à-dire si O et A_1 sont

d'un même côté de A_2A_3 . Si nous convenons d'appeler côté intérieur d'un côté du triangle de sustentation celui qui contient ce triangle, nous constatons que la figure, dans ses trois cas, est construite de la façon suivante :

Chaque côté du triangle de sustentation pour lequel O est du côté intérieur donne un pôle sur H^- . Chaque côté pour lequel O est du côté extérieur donne un pôle sur H^+ . Pour obtenir M_l on adopte la règle suivante de jonction :

Deux points sur H^+ se joindront intérieurement par un trait plein.

Deux points sur H^- se joindront intérieurement par un trait ponctué.

Un point de H^+ et un point de H^- se joindront extérieurement, la demi-droite partant du point de H^+ étant en trait plein et celle partant du point de H^- en trait ponctué.

Il est d'ailleurs bon de remarquer que cette règle de jonction est précisément celle de la perspective d'un triangle traversé par le plan issu de l'œil et parallèle au plan du Tableau. Les trois figures sont celles de la perspective du triangle $A'_1A'_2A'_3$ en supposant 3, 2 ou 1 sommets situés en arrière de ce plan.

15. Étudions la région $M_{A_2A_3}$. On aura une réaction N_1 appliquée en un point ω_1 de A_2A_3 , donc les équations à l'instant initial

$$\begin{aligned} Mc'' &= N_1 + \dots, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \dots &= N_1 v_1 + \dots, & c'' + p'y_2 - q'x_2 &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q} \right) - \dots &= -N_1 u_1 + \dots, & c' + p'y_3 - q'x_3 &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \dots &= \dots, \end{aligned}$$

avec les conditions de possibilité

$$c'' + p'y_1 - q'x_1 > 0, \\ N_1 > 0, \quad \omega_1 \text{ entre } \Lambda_2 \text{ et } \Lambda_3.$$

En retranchant les équations de $M_{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3}$ comme précédemment et introduisant le point P d'égal moment de N et N_1 et de coordonnées

$$\frac{Nu - N_1 u_1}{N - N_1}, \quad \frac{Nv - N_1 v_1}{N - N_1},$$

on obtiendra finalement les égalités

$$\Omega(P, \Lambda_2) = 0, \quad \Omega(P, \Lambda_3) = 0,$$

montrant que P est le pôle A'_1 de A_2, A_3 , ce qui donne la construction de ω_1 et N_1 , puis les conditions

$$(N - N_1)\Omega(\Lambda'_1, \Lambda_1) < 0, \\ N_1 > 0, \quad \omega_1 \text{ entre } \Lambda_2 \text{ et } \Lambda_3.$$

Comme $\Omega(\Lambda'_1, \Lambda_1)$ est positif ou négatif suivant que Λ'_1 est sur H^- ou sur H^+ , donc a un signe connu, il reste deux inégalités relatives à N et la condition relative à ω_1 ; une discussion très facile conduit alors, pour ω , à la région obtenue en joignant $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda'_1$ par la règle de perspective énoncée déjà pour M_L .

16. Étudions de même la région M_{Λ_1} . On aura une réaction N_1 appliquée en A_1 , donc les équations initiales

$$Mc'' = N_1 + \dots, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \dots = -N_1 y_1 - \dots, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q} \right) + \dots = -N_1 x_1 - \dots, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \dots = \dots, \\ c'' + p'y_1 - q'x_1 = 0,$$

avec les conditions

$$c'' + p'y_2 - q'x_2 > 0, \quad c'' + p'y_3 - q'x_3 > 0, \quad N_1 > 0.$$

En opérant toujours de la même façon, introduisant le point P d'égal moment de N et N_1 , on obtiendra l'équation

$$\Omega(P, A_1) = 0,$$

montrant que P est l'intersection de ωA_1 avec A'_2 , A'_3 polaire de A_1 , ce qui donne la construction de N_1 , puis les conditions

$$(N - N_1)\Omega(P, A_2) < 0, \quad (N - N_1)\Omega(P, A_3) < 0, \quad N_1 > 0,$$

d'où résulte

$$\Omega(P, A_2)\Omega(P, A_3) > 0.$$

Cette dernière montre facilement que P doit se trouver, non en un point quelconque de la droite A'_2 , A'_3 , mais en un point de la ligne de jonction de A'_2 et A'_3 au sens adopté précédemment. Alors, $\Omega(P, A_2)$ et $\Omega(P, A_3)$ ont des signes connus, et il reste des inégalités en N montrant aisément que ω doit être situé dans la région obtenue en joignant A'_2 , A'_3 , A_1 toujours par la règle de perspective.

17. En définitive, *les régions d'échappement simple s'obtiennent par jonction des côtés de $M_{A_1A_2A_3}$ aux sommets correspondants de M_l et les régions d'échappement double en joignant les sommets de $M_{A_1A_2A_3}$ aux côtés correspondants de M_l .*

On obtiendra de cette façon huit régions remplissant entièrement les deux faces de H sans superposition, et constituant un double diagramme plan qui, d'après sa construction même, ne dépend ni de la position, ni du mouvement du solide. On doit plutôt le considérer comme une figure invariable attachée au solide et

tracée sur les deux faces du plan $A_1 A_2 A_3$ de ce solide.

Le solide étant lancé sur la liaison et prenant le mouvement $M_{A_1 A_2 A_3}$, ce mouvement se continuera tant que le point ω qui va se déplacer dans le diagramme ne sortira pas de la région $M_{A_1 A_2 A_3}$.

Il peut en sortir de deux façons :

Le point ω , sans sortir, au point de vue géométrique, du triangle $M_{A_1 A_2 A_3}$, peut, à un certain moment, passer sur H et alors il sort de la région $M_{A_1 A_2 A_3}$ de H^+ pour entrer dans une région de H^- qu'on ne peut préciser *a priori* et qui est variable suivant les cas. C'est l'échappement par changement de signe de la réaction totale.

Le point ω peut, tout en restant sur H^+ , sortir de $M_{A_1 A_2 A_3}$ en traversant son contour en un point d'un côté ou en un sommet; quand la sortie s'effectue par un côté, on entre forcément dans la région d'échappement du sommet opposé; mais quand elle s'effectue par un sommet, on tombe dans une région pouvant varier suivant les cas.

LES LIAISONS UNILATÉRALES ET LES PERCUSSIONS.

18. Si le système, au lieu d'être soumis à des forces, est soumis à des percussions données provoquant des percussions de réaction ou même n'est soumis à aucune percussion donnée, mais uniquement à des percussions de réaction par suite d'un choc supposé essentiellement inélastique, on pourra refaire exactement les mêmes théories que précédemment, sauf les modifications suivantes :

Au lieu de raisonner sur les q'' , on raisonne sur les q' .

Les p , au lieu d'être les variations des q'' quand on passe du mouvement sur la liaison totale au mouvement réduit, seront les augmentations des variations des q' quand on passe de la percussion sur la liaison totale à la percussion sur la liaison réduite.

On retrouvera ainsi les mêmes équations aux p que dans la théorie relative aux forces ainsi que les mêmes conditions de possibilité, de sorte que : *Les diagrammes de toute nature trouvés pour le mouvement sous l'action des forces s'appliquent sans aucune modification au système matériel soumis à des percussions*; ils fournissent les échappements par percussion au moyen de la percussion totale de réaction de la liaison totale considérée comme liaison forcée.

ETUDE DU TRÉPIED SYMÉTRIQUE.

19. La base de sustentation A_1, A_2, A_3 est ici un triangle équilatéral dont O est le centre, et la conique Θ est le cercle imaginaire

$$X^2 + Y^2 + \frac{I}{M} = 0,$$

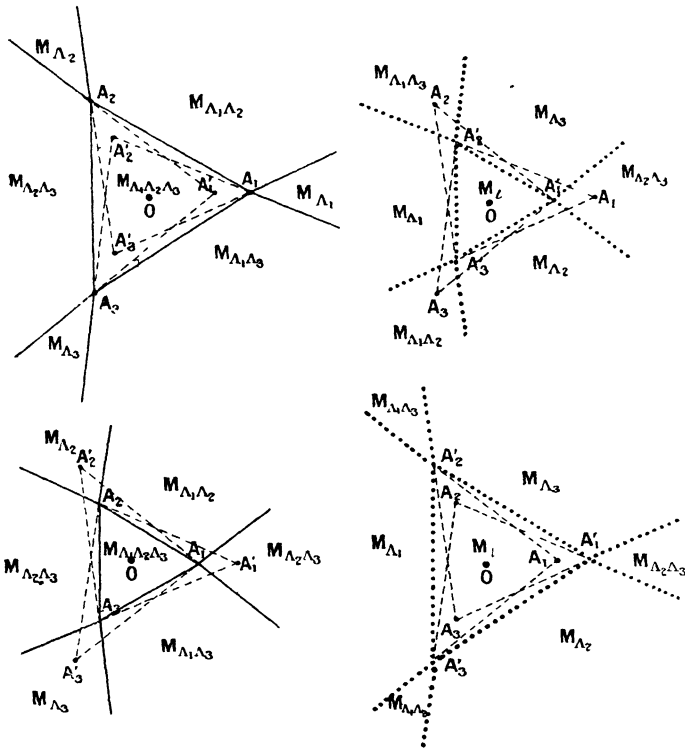
I étant le moment d'inertie du trépied par rapport à son axe Gz .

Les trois points A'_1, A'_2, A'_3 seront tous trois sur H^- , puisque le point O est du côté intérieur de chacun des côtés de A_1, A_2, A_3 , et formeront un triangle équilatéral concentrique et homothétique de la base de sustentation; si nous désignons par $2b$ et b le rayon et l'apothème de $M_{A_1A_2A_3}$, le rayon et l'apothème de M_l seront $\frac{I}{Mb}$ et $\frac{I}{2Mb}$, de sorte que le triangle M_l sera plus petit que $M_{A_1A_2A_3}$ si $\frac{I}{M} < 2b^2$ et plus grand dans

le cas contraire. On aura ainsi les diagrammes suivants (*fig. 2*).

Ces diagrammes permettent de faire l'étude com-

Fig. 2.



plete des échappements du trepied, soit sous l'action de forces, soit sous l'action de percussions.

Proposons-nous de faire l'application au cas du trepied soumis à une percussion donnée P que nous supposons d'abord ne pas être parallèle à H et que, par conséquent, nous pourrions toujours supposer être appliquée au point Ω où sa ligne d'action perce le

plan H_G mené par G parallèlement à H . Les coordonnées de ce point seront $\alpha, \beta, 0$, et l'on aura les équations de percussion sur la liaison totale

$$\begin{aligned} Mc' &= X + N, \\ Ip &= Z\beta + Nv, \\ Iq &= -Z\alpha - Nu, \\ Ir &= Yz - X\beta, \end{aligned} \quad c' = p = q = 0,$$

donnant

$$N = -Z, \quad u = z, \quad v = \beta,$$

de sorte que ω est la projection horizontale de Ω , et doit être considéré comme appartenant à H^+ si P est descendante, et à H^- si P est ascendante.

Plus particulièrement, supposons que Ω soit dans le plan de symétrie A_1OGz ; alors ω est sur la droite indéfinie OA_1 , et si nous désignons par α son abscisse sur l'axe OA_1 , on voit immédiatement que si P est descendante (diagramme H^+), le point ω sera dans les régions $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$, $M_{\Lambda_1\Lambda_3\Lambda_4}$ ou M_{Λ_1} suivant la position de α dans la suite

$$-\infty, \quad -b, \quad 2b, \quad +\infty,$$

et que si P est ascendante (diagramme H^-), il sera dans les régions M_{Λ_1} , M_L ou $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ suivant la position de α dans la suite

$$-\infty, \quad -\frac{1}{2Mb}, \quad \frac{1}{Mb}, \quad +\infty.$$

Il peut arriver que α coïncide avec une des valeurs de séparation, c'est-à-dire que ω soit sur une ou plusieurs frontières.

P étant descendante, si $\alpha = -b$, le point ω est sur la frontière de $M_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}$ et $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$; donc les trois contacts persistent, mais avec cette particularité que la réaction de percussion en A_1 est nulle; si $\alpha = 2b$, le point ω

aura donc à la limite un point ω situé sur H^+ , à l'infini dans la direction et le sens $A_1 O$, donc dans la région $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$, si P est au-dessus de H_G , et un point ω situé sur H^+ à l'infini dans la direction et le sens $O A_1$, donc dans la région M_{Λ_1} , si P est au-dessous de H_G .

Supposons de même une percussion P de direction et sens $A_2 A_3$; nous aurons un point ω sur H^+ à l'infini sur A_2, A_3 , du côté de A_3 si P est au-dessus de H_G et du côté de A_2 si P est au-dessous. L'examen des diagrammes montre que ces points à l'infini de H^+ sont dans des régions différentes suivant que l'on est dans le cas $\frac{I}{M} < 2b^2$ ou dans le cas $\frac{I}{M} > 2b^2$, de sorte que l'on a les résultats suivants :

$$P \text{ de direction et sens } \Lambda_2 \Lambda_3. \left\{ \begin{array}{l} P \text{ au-dessus de } H_G, \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{M} < 2b^2 \text{ région } M_{\Lambda_1 \Lambda_2}, \\ \frac{I}{M} > 2b^2 \text{ région } M_{\Lambda_1}; \end{array} \right. \\ P \text{ au-dessous de } H_G, \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{M} < 2b^2 \text{ région } M_{\Lambda_1 \Lambda_2}, \\ \frac{I}{M} > 2b^2 \text{ région } M_{\Lambda_2} \text{ (1)}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(1) La question de liaison unilatérale que nous venons de traiter comme application forme la partie la plus importante du problème de Mécanique donné à l'Agrégation en 1913 et dont M. de Sparre vient de publier ici même une solution complète (*N. A.*, juillet 1919).

Les cas que nous avons examinés embrassent tous les cas particuliers qui étaient indiqués à l'énoncé, et tous nos résultats coïncident avec ceux donnés par M. de Sparre. Laissant de côté une erreur de calcul qui, dans le cas examiné par lui à la page 263, le conduit à trois réactions égales, alors qu'il y en a une qui est nulle, nous ferons remarquer que la méthode de M. de Sparre, autant qu'on peut la reconstituer d'après les indications assez vagues qu'il donne et la façon dont il l'applique, fait partie de celles dont il a été parlé au début de notre exposé, et que, pour des cas particuliers autrement et convenablement choisis, elle donnerait des résultats autres que ceux de notre théorie rigoureuse, donc inexacts.