

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 76-80

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__76_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1886.

(1900, p. 573; 1917, p. 399.)

Si l'on inscrit dans une circonférence un quadrilatère quelconque ABCD et un rectangle EFGH, dont les diagonales EG et FH sont perpendiculaires aux diagonales AC et BD du quadrilatère ABCD, les quatre côtés des deux quadrilatères se coupent en seize points qui sont, quatre par quatre, sur des lignes droites I, J, K, L. La polaire du point d'intersection de deux quelconques de ces quatre droites par rapport à la circonférence passe par l'intersection des deux autres droites.

L. KLUG.

SOLUTION

Par M. R. B.

Donnons à l'énoncé une forme projective. Nous considérons deux quadrilatères $ABA'B'$, $\alpha\beta\alpha'\beta'$ inscrits à une même conique C, et tels que les diagonales AA' et $\beta\beta'$ soient conjuguées par rapport à C, ainsi que BB' et $\alpha\alpha'$. Il faut démontrer que ces deux quadrilatères ont les propriétés indiquées.

Rappelons que : si P et Q sont les points doubles de deux divisions homographiques sur une conique C, et si (M, M') , (N, N') sont deux couples de points correspondants des deux divisions, MN' et NM' se coupent sur PQ. On reconnaît en effet immédiatement que, si MN' et NM' se coupent sur PQ, le point N' correspond au point N dans l'homographie définie par les couples (P, P) , (Q, Q) , (M, M') .

Cela posé, il résulte de l'hypothèse que les divisions $(A\beta A'\beta')$ et $(\alpha B\alpha'B')$ sont toutes deux harmoniques, donc en correspondance homographique. Il existe donc, en vertu du lemme rappelé, une droite I contenant les points

$$(AB, \alpha\beta), (BA', \beta\alpha'), (A'B', \alpha'\beta'). (B'A, \beta'\alpha).$$

On peut, sans changer l'ordre des points de la première division, permuter dans la seconde α et α' , B et B', soit séparément, soit simultanément. Cette division ne cessera pas d'être harmonique, de sorte que le raisonnement s'applique toujours. On établit ainsi l'existence des trois autres droites J, K L, contenant :

J, les points

$$(AB, \alpha'\beta), (BA', \beta\alpha), (A'B', \alpha\beta'), (B'A, \beta'\alpha');$$

K, les points

$$(AB', \alpha\beta), (B'A', \beta\alpha'), (A'B, \alpha'\beta'), (BA, \beta'\alpha);$$

L, les points

$$(AB', \alpha'\beta), (B'A', \beta\alpha), (A'B, \alpha\beta'), (BA, \beta'\alpha').$$

La première partie de l'énoncé est ainsi établie. Pour établir la seconde, observons, qu'outre les points déjà considérés :

I contient $(A\alpha', A'\alpha)$ et $(B\beta', B'\beta)$;

J contient $(A\alpha, A'\alpha')$ et $(B\beta, B'\beta')$;

K contient $(A\alpha', A'\alpha)$ et $(B'\beta', B\beta)$;

L contient $(A\alpha, A'\alpha')$ et $(B'\beta', B\beta)$.

Par conséquent, I et J par exemple se coupent en $(B\beta', B'\beta)$ et K et L en $(B'\beta', B\beta)$. Or ces deux points sont conjugués par rapport à C, Donc, etc.

2038.

(1906, p. 14; 1918, p. 468)

On mène les hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC. Soient $D_1 E_1 F_1$ l'axe d'homologie des triangles ABC, DEF. Par E_1, F_1, D_1 on mène les parallèles à AB, BC, CD qui coupent BC, BA, AB aux points I, H, K, en ligne droite, et les parallèles à BC, CA, AB qui coupent AB, BC, CA aux points K_1, I_1, H_1 , aussi en ligne droite. Soient Q et Q_1 les coniques circonscrites à ABC et tangentes, la première à AI, BH, CK et la seconde à AI_1, BH_1, CK_1 .

I. Si par un point O de Q on mène des perpendiculaires à BC, CA, AB, elles coupent CA, AB, BC en μ, ν, λ et l'on

a la droite $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$. Ces mêmes *perpendiculaires menées* par un point O_1 de Q_1 coupent AB, BC, CA aux points ν_1, λ_1, μ_1 et l'on a la droite $\Delta(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

II. Les coniques Q et Q_1 et le cercle ABC ont un quatrième point commun ω auquel correspondent deux droites Δ et Δ_1 et la droite de Simson Δ_2 .

III. Si ABC est un triangle équilatéral, les coniques Q, Q_1 se superposent au cercle ABC et à tout point O de ce cercle correspondent trois droites $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$. P. SONDAT.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

La proposition à démontrer est un cas particulier de la suivante, qui n'est d'ailleurs que le théorème de Simson, énoncé sous sa forme la plus générale.

Soient ABC un triangle donné; D_A, D_B, D_C trois directions données, le lieu des points M tels que les parallèles menées par M à D_A, D_B, D_C rencontrent BC, CA, AB respectivement en trois points en ligne droite est une conique Q_1 circonscrite à ABC, et coupant la droite de l'infini en ses points d'intersection avec les rayons doubles de l'homographie déterminée par les trois courbes de rayons BC et D_A, CA et D_B, AB et D_C .

La tangente à Q_1 en A par exemple est le rayon conjugué de la direction BC dans l'involution ayant pour couples de rayons AB et AC et les directions asymptotiques de Q_1 .

En faisant correspondre aux côtés BC, CA, AB, les directions D_B, D_C, D_A , puis D_C, D_A, D_B , on obtient de même deux coniques Q_2 et Q_3 . Les trois coniques Q_1, Q_2, Q_3 font partie d'un même faisceau ponctuel.

Si en effet on prend pour axes CA et CB, si $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ est l'équation de AB, si m_1, m_2, m_3 désignent les coefficients angulaires de D_A, D_B, D_C , l'équation de Q_1 est

$$\frac{1}{a} x(m_3 - m_2)(m_1 x - y) - \frac{1}{b} y(m_3 - m_1)(y - m_2 x) - y[y(m_1 - m_3) + x m_1(m_3 - m_2)] = 0,$$

sur laquelle les propriétés de l'énoncé ci-dessus se vérifient immédiatement.

Les équations de Q_2 et Q_3 s'obtiennent par permutation cir-

culaire de m_1, m_2, m_3 et l'on a évidemment $Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv 0$. Les directions asymptotiques de Q_1, Q_2 et Q_3 sont d'ailleurs par leur détermination même en involution; ces trois coniques ayant déjà trois points communs, A, B, C en ont donc un quatrième.

La troisième partie découle évidemment de la propriété énoncée ci-dessus et l'on peut ajouter à l'énoncé que *dans le cas du triangle équilatéral les trois droites $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ forment un triangle équilatéral.*

2039.

(1906, p. 144; 1917, p. 468.)

Démontrer la relation

$$(1) \sum \frac{f'''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2 f''(\alpha)} + \sum \frac{f''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)} + \sum \frac{1}{f(\gamma) f'(\gamma)} = 0,$$

la première somme s'étendant à toutes les racines supposées distinctes de l'équation algébrique $f(x) = 0$; la deuxième, à toutes les racines supposées distinctes de $f'(x) = 0$; la troisième, à toutes les racines supposées distinctes de $f''(x) = 0$.

Étendre la relation (1) en faisant intervenir les dérivées quatrième, cinquième, etc. du polynôme $f(x)$.

NICOLAS KRYLOFF.

SOLUTION

Par M. LOUIS POLI.

La question est assez simple, mais une erreur d'impression a dû retarder l'envoi d'une solution. Il faut lire, pour la seconde somme, $\sum \frac{f'''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)}$.

J'ajoute qu'on doit supposer les racines de $f(x) = 0$ distinctes non seulement de celles de $f'(x) = 0$ [ce qui est évident, sans cela $f(x) = 0$ aurait une racine double]; mais même distinctes des racines de $f''(x)$. Sans cela, pour cette racine, la première et la dernière somme deviennent infinies.

On sait que la somme $\sum \frac{P(x)}{Q'(x)}$ étendue à toutes les racines supposées distinctes de $q(x) = 0$ est égale à 0 si le degré de Q surpasse au moins de 2 celui de P.

Faisons dans cette identité $Q = \varphi \chi \psi^2, \dots$

Les racines de Q seront celles de φ , celles de χ , celles de ψ , etc. et Q' pour une racine α de φ par exemple se réduira à $Q'(\alpha) = \varphi'(\alpha)\chi(\alpha)\psi(\alpha)\theta(\alpha)$.

L'identité en question s'écrit donc

$$\sum \frac{P(\alpha)}{\varphi' \chi \psi \theta} + \sum \frac{P(\beta)}{\varphi \chi' \psi \theta} + \sum \frac{P(\gamma)}{\varphi \chi \psi' \theta} + \sum \frac{P(\delta)}{\varphi \chi \psi \theta'} + \dots = 0$$

La première somme doit s'étendre à toutes les racines de φ , la seconde à celles de χ ,

En particulier, si l'on fait $\varphi = f(x)$, $\chi = f'$, $\psi = f''$, ..., et $p = f^{(n)}$, il viendra

$$\begin{aligned} \sum \frac{f^{(n)}(x)}{f'^2 f'' f''' \dots f^{(\mu)}} + \sum \frac{f^{(n)}(x)}{f f'^2 f''' \dots f^{(\mu)}} + \dots \\ + \sum \frac{f^{(n)}(x)}{f f' \dots f^{(\mu-1)} f^{(\mu+1)}} = 0. \end{aligned}$$

La première somme s'étend aux racines de $f = 0$, la seconde aux racines de f' ,

Le cas du texte correspond à $n = 3$, $\mu = 2$.