

J.-A. MOREN

**Sur certaines relations qui existent
entre l'épicycloïde et l'hypocycloïde
à trois rebroussements**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 479-484

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__479_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M'8a]

**SUR CERTAINES RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE
L'ÉPICYCLOÏDE ET L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS
REBROUSSEMENTS ;**

PAR M. LE CAPITAINE J.-A. MOREN,
A Halifax (Canada).

Une épicycloïde E_3 et une hypocycloïde H_3 , toutes
deux à trois rebroussements, seront dites *correspon-*

dantes, si elles ont mêmes points de rebroussement.

Une tangente à H_3 sera dite *tangente originale*, relativement à cette courbe, et *corde de contact*, relativement à E_3 . On désignera par T son point de contact, par P et P_1 ses deux autres points de rencontre avec H_3 , par R et R_1 ses deux points de rencontre (réels) avec E_3 . Les points P et P_1 sont les milieux respectifs de TR et de TR_1 .

Les relations des deux courbes avec la tangente considérée donnent lieu à diverses propriétés dont les énoncés présentent entre eux une certaine analogie. Nous signalerons les suivantes, en supprimant les démonstrations, pour plus de brièveté :

HYPOCYCLOÏDE (1).

I. a. La longueur du segment PP_1 est constante et égale à celle d'un axe de symétrie de la courbe.

b. Le milieu de ce segment a pour lieu le cercle inscrit à H_3 .

II. a. Les cordes focales des paraboles osculatrices en P et P_1 coïncident avec la tangente originale. Les foyers

EPICYCLOÏDE.

I. a. La longueur du segment RR_1 est constante et égale à celle d'un axe de symétrie de la courbe.

b. Le milieu de ce segment a le même lieu que ci-contre.

II. a. Les cordes focales des paraboles osculatrices de R et R_1 coïncident avec la corde de contact. Les foyers Q_1, Q_2 de

(1) Plusieurs des propriétés énoncées de l' H_3 se trouvent dans les *Nouvelles Annales* : 1870, p. 202, 256 (Painvin), p. 254 (Laguerre), p. 472 (Callandreau); 1875, p. 21 (Cahen); 1913, p. 49 et 113 (J. Lemaire). Quelques-unes de celles qui figurent dans ce dernier article avaient été obtenues indépendamment par l'Auteur, avant qu'il eût connaissance du travail de M. Lemaire.

respectifs de ces paraboles sont R et R₁ (1).

ces paraboles sont les points de cette corde de contact déterminés par les relations

$$\frac{RQ}{PQ} = \frac{R_1Q_1}{P_1Q_1} = \frac{2}{3}.$$

Ces foyers ont pour lieu une courbe qui, comme E₃, est d'ordre 8 et de classe 5.

b. Les axes de ces deux paraboles sont parallèles. La somme des racines carrées de leurs paramètres est constante.

b. Même énoncé que ci-contre.

III *a.* Les tangentes aux points P et P₁ sont rectangulaires.

III. *a.* Les tangentes aux points R et R₁ sont rectangulaires.

b. La somme des carrés des distances du centre de H₃ à ces deux tangentes est constante.

b. Même énoncé que ci-contre.

c. Ces tangentes se rencontrent sur le cercle inscrit à H₃.

c. Ces tangentes se rencontrent sur le cercle circonscrit à E₃.

d. Les bissectrices de l'angle formé par ces deux tangentes forment un couple de tangentes rectangulaires à une hypocycloïde égale et inversement homothétique à H₃.

d. Du point de rencontre de ces tangentes, on peut encore en mener trois autres à E₃. Deux d'entre elles sont rectangulaires et sont les bissectrices de l'angle formé par la première paire de tangentes.

(1) Cette propriété est due à Laguerre (*loc. cit.*), à qui il semble avoir échappé que le lieu du point R est l'E₃ correspondant à H₃.

e. La troisième tangente que l'on peut mener à H_3 , par le point de rencontre des deux tangentes considérées, est perpendiculaire à la tangente originale.

f. Cette troisième tangente est parallèle à la troisième normale que l'on peut mener à H_3 par le point de rencontre des normales aux points de contact des tangentes rectangulaires.

g. Si les trois tangentes font les angles respectifs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ avec un axe de symétrie de H_3 , on a la relation

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_3 \\ = \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3. \end{aligned}$$

IV. α . Les normales en P et P_1 sont rectangulaires, et le lieu de leur point de rencontre est le cercle des rebroussements de H_3 .

e. La corde de contact de la seconde paire de tangentes rectangulaires est perpendiculaire à la corde de contact originale et se confond avec la troisième tangente à H_3 .

f. La cinquième tangente est parallèle à la cinquième normale, que l'on peut mener à E_3 par le point d'intersection commun des normales aux points de contact des deux paires de tangentes rectangulaires.

g. Si les cinq tangentes font les angles respectifs $\theta_1, \dots, \theta_5$ avec un axe de symétrie de E_3 , on a la relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} (\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 \\ + \operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_4 + \operatorname{tg} \theta_5) \\ = \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3 \operatorname{tg} \theta_4 \operatorname{tg} \theta_5. \end{aligned}$$

IV. α . Les normales en R et R_1 sont rectangulaires, et le lieu de leur point de rencontre est le cercle des rebroussements de E_3 .

Ce cercle est le même dans les deux cas. Les normales aux points P, R se coupent sur lui et de même les normales aux points P_1, R_1 . La droite qui joint les deux points d'intersection est le diamètre du cercle parallèle à la tangente originale. Les tangentes au cercle en ces deux mêmes points sont les bissectrices des angles formés respectivement par les tangentes en P, R et par les tangentes en P_1, R_1 .

b. La parabole qui a pour foyer le point d'intersection des normales en P et P_1 , et qui touche les tangentes en ces points, enveloppe H_3 .

c. Cette parabole a pour tangente au sommet la tangente originale et pour axe la troisième normale issue du point d'intersection des normales en P et P_1 .

b. La parabole qui a pour foyer le point d'intersection des normales en R et R_1 , et qui touche les tangentes en ces points, enveloppe H_3 .

c. Cette parabole a pour tangente au sommet la corde de contact, et pour axe la troisième normale désignée ci-contre.

d. Ce point d'intersection est aussi le foyer d'une parabole qui touche la seconde paire de tangentes rectangulaires. Cette nouvelle parabole enveloppe H_3 , son sommet décrivant cette courbe, et sa tangente au sommet étant la troisième tangente à H_3 .

V. a. La droite joignant les points d'intersection respectifs des tangentes et des normales en P et P_1 passe par le centre de H_3 et est parallèle aux axes des paraboles osculatrices aux points considérés

b. Le cercle de diamètre PP_1 enveloppe le cercle tangent et le cercle des rebroussements, sa corde de contact étant la droite désignée ci-dessus.

c. Cette corde de contact et PP_1 se coupent respectivement en leurs milieux.

V. a. Même énoncé que ci-contre, en remplaçant P et P_1 par R et R_1 .

b. Idem.

c. Idem.

VI. *a.* La somme des carrés des rayons de courbure en P et P_1 est constante.

b. Le produit des distances à un diamètre quelconque du cercle du point P et du centre de courbure en ce point est égal au produit analogue relatif au point P_1 .

c. La somme des carrés des distances au centre des centres de courbure en P et P_1 est constante et égale à 10 fois le carré du rayon du cercle des rebroussements.

d. L'enveloppe de l'axe radical des cercles de courbure en ces points est une hypocycloïde à trois rebroussements.

VII. *a.* Le segment d'une tangente à H_3 , comprise entre le point de contact et le cercle inscrit, est égal à la corde interceptée sur cette tangente par le cercle.

b. La somme des puissances des points de contact de deux tangentes rectangulaires, par rapport au cercle tritangent, est constante.

c. La somme des puissances des pieds de deux normales rectangulaires, par rapport au cercle des rebroussements, est constante.

VI. *a.* Idem.

b. Idem.

c. La somme des carrés des distances au centre des centres de courbure en R et R_1 est constante et égale à $\frac{34}{25}$ fois le carré du rayon du cercle des rebroussements.

d. Même énoncé que ci-contre.

VII. *a.* Le point de contact d'une tangente à E_3 divise, dans le rapport $\frac{1}{4}$, la corde interceptée sur cette tangente par le cercle circonscrit.

b. Même énoncé que ci-contre.

c. Idem.