NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Étude des surfaces de translation de Sophus Lie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 454-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__454_1>

[O¹6s]

ÉTUDE DES SURFACES DE TRANSLATION DE SOPHUS LIE

(*Suite*)

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

---

6. Si la quartique Q admet un point de rebroussement ordinaire et un point double comptant pour deux, c'est-à-dire point de contact de deux branches de courbe, on peut ramener son équation à la forme

$$(53)\qquad x^3(y+x) + 2\lambda x^2 y + y^2 = 0,$$

l'origine étant le point double comptant pour deux et Ox la tangente en ce point; le point de rebroussement a été renvoyé à l'infini sur Oy, la tangente de rebroussement étant la droite de l'infini. On a immédiatement les expressions rationnelles de x et y en posant

$$y = (\lambda^2 - 1 - t^2)x;$$

on trouve aisément

$$(54)\quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2+1-\lambda^2}{t+\lambda}, & y = -\dfrac{(t^2+1-\lambda^2)^2}{t+\lambda}; \\ X = \displaystyle\int \frac{dt}{\lambda^2-1-t^2}, \quad Y = \int dt, & Z = \displaystyle\int \frac{(t+\lambda)\,dt}{(\lambda^2-1-t^2)^2}. \end{cases}$$

Les intégrales X, Y, Z ne sont algébriques que si $\lambda^2 = 1$, auquel cas l'origine, au lieu d'être un point double où deux branches de courbe ont un contact simple, est un point de rebroussement de seconde espèce. Nous conservons donc ce cas en prenant $\lambda = +1$; la quartique Q représentée par les équations paramétriques

$$x = \frac{t^2}{t+1} \quad \text{et} \quad y = -\frac{t^4}{t+1}$$

est facile à construire; on voit aisément qu'elle peut être coupée par une droite en quatre points réels. Les intégrales deviennent, puisque nous pouvons multiplier chacune par un facteur arbitraire,

$$\frac{2}{t}, \quad \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad \frac{8}{3t^3} + \frac{4}{t^2}.$$

L'équation aux t des points d'intersection avec la droite $ux - y + w = 0$ est

$$t^4 + ut^2 + wt + w = 0.$$

On en déduit

$$\sum t_i = 0, \qquad \sum \frac{1}{t_i} = -1, \qquad \sum \frac{1}{t_i^2} = 1 - \frac{2u}{w}.$$

En écrivant l'équation sous la forme

$$t + \frac{u}{t} + \frac{w}{t^2} + \frac{w}{t^3} = 0,$$

on en déduit

$$w \sum \frac{1}{t_i^3} + w \sum \frac{1}{t_i^2} - u = 0,$$

et par suite

$$\sum \frac{1}{t_i^3} = \frac{3u}{w} - 1,$$

puis

$$\frac{8}{3}\sum \frac{1}{t_i^3} + 4\sum \frac{1}{t_i^2} = \frac{4}{3}.$$

Je définirai donc la surface S par les équations

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2} + 1,\\ y &= \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2},\\ z &= \frac{8}{3t_1^3} + \frac{4}{t_1^2} + \frac{8}{3t_2^3} + \frac{4}{t_2^2} - \frac{2}{3}. \end{aligned}\right.$$

Or, on vérifie aisément les relations

$$\begin{aligned} x^3 &= 3z + 3x + \frac{12(x+1)}{t_1 t_2},\\ x - 1 &= \frac{4y}{t_1 t_2}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'équation de la surface S

$$(56)\qquad x^3 y = 3[x^2 + xy + yz - 1].$$

Cette surface S est du quatrième degré et à centre; elle est le lieu des milieux des cordes de la quartique gauche unicursale [1]

$$(57)\qquad x = \frac{4}{t} + 1, \qquad y = t, \qquad z = \frac{16}{3t^3} + \frac{8}{t^2} - \frac{2}{3}.$$

---

[1] Toute quartique gauche unicursale, ayant un point stationnaire à l'infini, tangente en ce point au plan de l'infini, sans lui être osculatrice, admet pour lieu du milieu de ses cordes la surface la plus générale déduite de la surface (56) dans la transformation homographique employée ici, car cette quartique se ramène elle-même à la forme (57).

Cette quartique et sa symétrique par rapport à l'origine jouissent, par rapport à S, de diverses propriétés déjà signalées comme asymptotiques et séparatrices de certaines régions.

Ici, en remplaçant x, y, z par ix, iy, iz, nous déduisons de S une surface S_1 doublement de translation aussi

$$x^3 y + 3(x^2 + xy + yz + 1) = 0 \tag{58}$$

réelle aussi, car pour $x = \alpha$, nous avons une section hyperbolique dans la surface. Sur S_1, les quatre quartiques de translation sont imaginaires toutes.

Pour terminer la discussion relative au cas où il n'existe que des points doubles, il n'y a plus qu'à envisager le cas où il y a un point double unique où se croisent deux branches de courbe osculatrices. Si l'on suppose ce point à l'origine, et la tangente coïncidant avec Ox, la quartique Q aura une équation

$$\begin{aligned}(59)\quad & (Ax^2 + y)^2 \\ & + Bxy(Ax^2 + y) + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fy^3 = 0.\end{aligned}$$

En posant

$$y = x^2(-A + xt),$$

on remplace cette équation par

$$\begin{aligned}(60)\quad & t^2 + Bt(-A + xt) \\ & + C(-A + xt)^2 + F(-A + xt)^3 + x[\ldots] = 0;\end{aligned}$$

pour $x = 0$, les deux valeurs de t fournies par l'équation

$$t^2 - ABt + CA^2 - FA^3 = 0 \tag{61}$$

doivent être supposées racines simples; à chacune correspond un développement régulier de t suivant les puissances croissantes de x, correspondant à l'une ou l'autre branche de la quartique passant par l'origine. La fonction y est donc d'ordre infinitésimal égal à 2, x étant l'infiniment petit principal. L'expression

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(Ax^2+y) + Bx(Ax^2+y) + Bxy + 2Cx^2y + 3Dxy^2 + 4Ey^3 + 3Fy^2$$

est d'ordre 3, le coefficient de x^3 étant $2t_0 - AB$; t_0 étant racine de (61), $2t_0 - AB$ n'est pas nul. Dans l'intégrale $\int \frac{y\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ l'élément $\frac{y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ est infiniment grand d'ordre 1 et l'intégrale a une singularité logarithmique.

7. Il ne reste donc qu'à examiner le cas du point triple. Nous le supposons à l'origine; l'équation de la courbe est donc

$$(62) \qquad F(x, y) = f_4(x, y) + f_3(x, y) = 0,$$

où f_4 et f_3 sont des polynomes homogènes de degré 4 et 3. Je pose $y = tx$, d'où

$$(63) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{f_3(1, t)}{f_4(1, t)}, \\ F'_x\,dx + F'_y(t\,dx + x\,dt) = 0; \end{cases}$$

la dernière équation peut s'écrire

$$(xF'_x + yF'_y)\,dx + x^2F'_y\,dt = 0.$$

Mais, en vertu de $F(x, y) = 0$, on peut écrire

$$xF'_x + yF'_y = -F'_z = -f_3(x, y) = -x^3f_3(1, t).$$

On aura donc

$$\frac{dx}{F'_y} = \frac{dt}{xf_3(1, t)} = \frac{-f_4(1, t)\,dt}{f_3^2(1, t)}.$$

Les intégrales X, Y, Z sont donc

$$\int \frac{dt}{f_3(1,t)}, \qquad \int \frac{t\,dt}{f_3(1,t)}, \qquad -\int \frac{f_4(1,t)}{f_3^2(1,t)}\,dt.$$

La première montre que, si le polynome $f_3(1,t)$ n'est pas un cube parfait, chaque facteur simple de $f_3(1,t)$ donne un logarithme; donc $f_3(1,t)$ n'a qu'une racine triple si l'on veut avoir une surface algébrique, autrement dit les trois tangentes au point triple sont confondues; la réciproque est immédiate, car on peut supposer que la tangente unique est Oy, alors

$$f_3(x.y) = x^3, \qquad f_3(1,t) = 1;$$

on a trois polynomes à intégrer. Le résultat est même d'une élégance remarquable : nous obtenons, sans calcul aucun, la surface [1]

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= t_1 + t_2,\\ y &= t_1^2 + t_2^2,\\ z &= A(t_1^5 + t_2^5)\\ &\quad + B(t_1^4 + t_2^4) + C(t_1^3 + t_2^3) + D(t_1^2 + t_2^2) + E(t_1 + t_2). \end{aligned} \right.$$

Il est inutile de donner aucune explication complémentaire; mais, si nous voulons mettre en évidence le second mode de génération de la surface, il suffit de trouver le centre de symétrie, et alors nous reviendrons à la quartique Q dont l'équation a été prise, d'après ce qui précède, sous la forme

$$(65)\qquad 5Ay^4 + 4By^3x + 3Cy^2x^2 + 2Dyx^3 + Ex^4 + x^3 = 0.$$

Le raisonnement de ce paragraphe suppose $A \neq 0$.

---

[1] Cet exemple donne cette fois la surface lieu des milieux des cordes d'une quintique gauche unicursale, admettant un unique point à l'infini, point triple à tangentes confondues, où le plan osculateur est le plan de l'infini.

sinon la quartique se décompose, mais la surface reste surface de translation avec deux modes de génération, en perdant son centre de symétrie toutefois; ceci sera vérifié ultérieurement. Sous la forme (64), la seule hypothèse faite est que l'axe des z soit la génératrice triple du cône directeur des tangentes des courbes génératrices. Donnons l'équation de la surface sous cette forme; c'est un calcul simple de fonctions symétriques que j'omets, t_1 et t_2 étant racines de l'équation

$$T^2 - xT + \frac{x^2 - y}{2} = 0\,;$$

on trouve ainsi

$$(66)\qquad z = \frac{A}{4}(5xy^2 - x^5) + B\,\frac{y^2 + 2x^2y - x^4}{2} + C\,\frac{3xy - x^3}{2} + Dy + Ex.$$

Toute surface de ce type dérive nécessairement de cette surface (66) par un simple déplacement.

Déterminons maintenant la substitution homographique que l'on doit faire sur Q de façon à avoir le type le plus réduit. Cherchons les points d'inflexion de Q : soit

$$ux + vy - w = 0$$

l'équation de la tangente d'inflexion, le t d'un point d'inflexion satisfait aux équations

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} u + vt + w(5At^4 + 4Bt^3 + 3Ct^2 + 2Dt + E) &= 0,\\ v + w(20At^3 + 12Bt^2 + 6Ct + 2D) &= 0,\\ w(60At^2 + 24Bt + 6C) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Il y a deux points d'inflexion : il y a donc trois cas à distinguer, suivant qu'ils sont imaginaires conjugués, réels et distincts, ou confondus. Dans le premier cas, nous supposerons que les droites les réunissant au point triple soient projetées suivant les directions isotropes et ces points eux-mêmes reportés à l'infini, donc

$$10At^2 + 4Bt + C \equiv (t^2+1) \times 10A,$$

d'où

$$B = 0, \qquad C = 10A.$$

Puis $f_4(1, t)$ est nul pour $t = +i$ ou $t = -i$, donc

$$D = 0, \qquad E = 25A.$$

Je peux supposer $A = 1$ en multipliant les cotes de tous les points de la surface par une même constante; je peux aussi retrancher Ex de z, ce qui revient toujours à une transformation homographique. Je conserve donc comme type réduit

$$z = (t_1^5 + t_2^5) + 10(t_1^3 + t_2^3),$$

qui me conduit à l'équation

$$\begin{aligned} 4z &= 5xy^2 - x^5 + 20(3xy - x^3) \\ &= 5x[(y-6)^2 - 36] - 20x^3 - x^5. \end{aligned}$$

Si donc je remplace y par $y - 6$, j'aurai le résultat définitif

$$(68) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= t_1 + t_2, \\ y &= t_1^2 + t_2^2 - 6, \\ z &= (t_1^5 + t_2^5) + 10(t_1^3 + t_2^3); \end{aligned} \right.$$

$$(69) \qquad 4z = -180x + 5xy^2 - 20x^3 - x^5,$$

et la surface S ainsi obtenue ayant un centre, nous en déduisons immédiatement le second mode de génération. La surface S est lieu des milieux des cordes d'une certaine courbe unicursale du cinquième ordre.

Je change S en ix, iy, iz; j'obtiens une surface S_1

$$(70) \qquad 4z = -180x - 5xy^2 + 20x^3 - x^5$$

à réseaux imaginaires, mais réelle.

En changeant dans (68) t_1, t_2, x, z en it_1, it_2, ix, iz et y en $-y$, nous avons précisément le cas des deux points d'inflexion réels et distincts, d'où la surface S_2 :

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= t_1 + t_2,\\ y &= t_1^2 + t_2^2 + 6,\\ z &= t_1^5 + t_2^5 - 10(t_1^3 + t_2^3); \end{aligned}\right.$$

$$(72)\qquad 4z = -180x + 5xy^2 + 20x^3 - x^5,$$

et dans S_2 remplaçant x, y, z par ix, iy, iz, nous avons encore une surface S_3 réelle, mais à réseaux de translation imaginaires

$$(73)\qquad 4z = -180x - 5xy^2 - 20x^3 - x^5.$$

Sur S et S_2 nous avons comme précédemment deux courbes enveloppes des génératrices, asymptotiques particulières, et séparatrices de diverses régions où le nombre des génératrices réelles qui s'y croisent est 0, 2 ou 4.

Enfin, si les deux points d'inflexion de Q sont confondus en un seul, nous supposerons ce point à l'infini sur Ox : $B = C = E = 0$, la tangente d'inflexion étant la droite de l'infini, d'où $D = 0$, d'où les équations

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= t_1 + t_2,\\ y &= t_1^2 + t_2^2,\\ z &= t_1^5 + t_2^5,\\ 4z &= 5xy^2 - x^5. \end{aligned}\right.$$

Comme dans ce qui précède, nous adjoindrons à cette surface Σ la surface Σ_1

$$(75)\qquad 4z - 5xy^2 + x^5 = 0$$

engendrée par des réseaux imaginaires; ici il n'y a que deux surfaces au lieu de quatre, car le changement de x et z en ix et iz laisse la surface invariante. Ce fait est lié à cette propriété que, contrairement aux exemples précédents, sur les quatre courbes de translation qui passent par un point réel de Σ, il y en a toujours deux au moins qui sont imaginaires. Car les équations des deux systèmes de génération sont pour Σ

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= t_1 + t_2 = -t_3 - t_4, \\ y &= t_1^2 + t_2^2 = -t_3^2 - t_4^2, \\ z &= t_1^5 + t_2^5 = -t_1^5 - t_2^5. \end{aligned}\right.$$

Le plan $y = 0$ est plan de symétrie pour Σ; si y est positif, t_3 et t_4 sont sûrement imaginaires; si y est négatif, t_1 et t_2 le sont sûrement. Si nous prenons la moitié de Σ où y est positif, il faudra encore que l'on ait $y > \frac{x^2}{2}$ pour que t_1 et t_2 soient réels; la séparatrice est sur la surface la courbe $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = 2t^5$, qui comme précédemment est enveloppe des courbes t_1 ou t_2 et en même temps asymptotique; la surface Σ est le lieu des milieux de cette courbe du cinquième ordre ou de la courbe symétrique par rapport à l'origine. Tous les réseaux tracés sur Σ_1 sont imaginaires.

8. Nous allons étudier le cas de la quartique Q décomposée en une droite et une cubique. Écrivons l'équation de Q sous la forme

$$(ux + vy + w)\, f(x, y) = 0,$$

où f est du troisième degré en x et y; le long de la droite, nous avons à faire trois intégrations

$$\int \frac{dx}{f(x, y)}, \qquad \int \frac{x\,dx}{f(x, y)}, \qquad \int \frac{y\,dx}{f(x, y)}$$

portant sur une fraction rationnelle de x dont les pôles correspondent aux racines des deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad ux + vy + w = 0.$$

Donc ces intégrales ne peuvent être algébriques que si les trois points d'intersection de la droite et de la cubique sont confondus ; la droite doit être ou tangente d'inflexion ou tangente de rebroussement ; ce dernier cas exige que la cubique soit unicursale et admette un point double, nous verrons que la réciproque est vraie ; dans le premier cas, la cubique peut être de genre 1 ou o et, si la droite est tangente d'inflexion, comme les fractions à intégrer n'ont chacune qu'un pôle triple, la somme des résidus étant nulle, le résidu unique est nul, donc les courbes planes dont la translation engendre la surface sont algébriques ; mais, pour que les courbes associées soient elles-mêmes algébriques, c'est-à-dire pour que la surface elle-même le soit, il est nécessaire (et d'ailleurs suffisant) que la cubique soit unicursale avec rebroussement. En effet, le long de la cubique nous avons à effectuer les intégrations

$$Z = \int \frac{dx}{(ux - vy + w)\dfrac{\partial f}{\partial y}}, \qquad X = \int \frac{x\,dx}{(ux + vy + w)\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

$$Y = \int \frac{y\,dx}{(ux + vy + w)\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Or, si la cubique est de genre 1, l'expression

$$uX + vY + wZ$$

se réduit à $\displaystyle\int \frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$ qui est l'intégrale unique de première espèce de la courbe, fonction essentiellement transcendante, donc la courbe X, Y, Z est transcendante. Si la cubique est de genre zéro, et si le point double n'est pas de rebroussement, chacune des deux valeurs distinctes du paramètre t donnant le point.

double donne un pôle simple dans les fractions à intégrer, donc la courbe est transcendante; il ne reste donc que le cas du rebroussement, qui réussit, en associant à la cubique soit sa tangente de rebroussement, soit son unique tangente d'inflexion.

Soit d'abord la tangente de rebroussement; je peux, par transformation réelle, réduire Q à la forme

$$x(x^2-y^3)=0. \tag{77}$$

Je prendrai sur la cubique $x=\frac{1}{t^3}$, $y=\frac{1}{t^2}$; les intégrales X, Y, Z se réduisent à $\int dt$, $\int t\,dt$, $\int t^3\,dt$. Sur la droite, je remplace $\dfrac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ par $\dfrac{-dy}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ ou $\dfrac{dy}{y^3}$. Les intégrales X, Y, Z se réduisent à o, $\int\frac{dy}{y^2}$, $\int\frac{dy}{y^3}$. Je pourrai donc écrire, en remplaçant sur la tangente y par $\frac{1}{t_4}$,

$$\left\{\begin{aligned} x &= t_1+t_2 = -t_3,\\ y &= t_1^2+t_2^2 = -t_3^2+2t_4,\\ z &= t_1^4+t_2^4 = -t_3^4+2t_4^2. \end{aligned}\right. \tag{78}$$

L'équation de la surface résulte de calculs déjà faits :

$$2z=y^2+2x^2y-x^4. \tag{79}$$

Les deux courbes t_3, t_4 qui passent par un point réel sont toujours réelles, mais les courbes t_1, t_2 ne le sont que si $2y>x^2$; la séparatrice sur la surface est la courbe $x=2t$, $y=2t^2$, $z=2t^4$ qui jouit de propriétés déjà signalées. Ici la surface [1] a perdu la propriété d'admettre un centre; elle a un plan de symétrie, le plan yOz.

[1] Cet exemple donne cette fois la surface lieu des milieux des cordes de la quartique gauche unicursale admettant à l'infini un point stationnaire où le plan osculateur est le plan de l'infini.

Voyons enfin le cas de la cubique unicursale à rebroussement jointe à sa tangente inflexionnelle. Je prends

$$F(x, y) \equiv y(y - x^3).$$

On trouve aisément

$$(80) \qquad \begin{cases} x = t_1 + t_2 = - t_3 + t_4, \\ y = t_1^2 + t_2^2 = - t_3^2 + t_4^2, \\ z = \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = - \dfrac{1}{t_3}, \end{cases}$$

puisque t_1 et t_2 sont racines de $T^2 - xT + \dfrac{x^2 - y}{2} = 0$, on a évidemment

$$z = \frac{2x}{x^2 - y}$$

ou

$$(81) \qquad z(x^2 - y) - 2x = 0.$$

Cette surface est lieu des milieux des cordes de la cubique $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = \dfrac{2}{t}$, tangente au plan de l'infini.

9. Le dernier cas à examiner est celui où Q se décompose en deux coniques; le cas où toutes les coniques du faisceau se réduisent à deux droites a été élucidé : on a le paraboloïde elliptique ou hyperbolique. Ce cas écarté, on sait qu'on peut se borner au cas de deux coniques proprement dites; on a affaire à des intégrales curvilignes effectuées le long de l'une ou l'autre, donc finalement à des intégrales de fractions rationnelles dont les pôles correspondent aux points d'intersection; si les deux coniques ne sont pas soit bitangentes, soit surosculatrices, il y a au moins un point simple dans l'intersection, donc les surfaces sont transcendantes. Le cas du double contact a été étudié complètement et a donné des surfaces transcen-

dantes. Il ne reste donc que le cas de la surosculation.

Je traite ce cas en prenant pour coniques A et B deux paraboles égales ayant même axe :

$$A \equiv x^2 - 2py, \qquad B \equiv x^2 - 2py - a.$$

On constate sans peine que les intégrales sont $\int dx$, $\int x\,dx$, $\int y\,dx$ sur l'une d'elles, et $-\int dx$, $-\int x\,dx$, $-\int y\,dx$ sur l'autre. J'écris les équations paramétriques

$$(82)\qquad \begin{cases} x = t_1 + t_2 = t_3 + t_4, \\ y = t_1^2 + t_2^2 = t_3^2 + t_4^2 - 2a, \\ z = t_1^3 + t_2^3 = t_3^3 + t_4^3 - 3a(t_3 + t_4), \end{cases}$$

donnant la surface algébrique du troisième ordre

$$(83)\qquad 2z + x^3 - 3xy = 0$$

déjà rencontrée plus haut, tout au moins provisoirement. Cette surface est réglée, lieu des milieux des cordes de la cubique $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = 2t^3$ osculatrice au plan de l'infini. Sur toute surface réglée du troisième ordre, il y a deux droites exceptionnelles, rencontrées par toutes les génératrices courantes. Ici nous sommes dans le cas où ces deux droites sont confondues; c'est la droite à l'infini du plan yOz. Cette forme (83) constitue une forme canonique intéressante pour les surfaces réglées du troisième ordre dont les deux directrices rectilignes exceptionnelles sont confondues; c'est la surface connue sous le nom de *surface de Cayley*.

Le calcul précédent nous donne, sans calculs, les asymptotiques non rectilignes : ce sont les cubiques gauches représentées par les équations

$$(84)\qquad x = 2t, \qquad y = 2(t^2 - a), \qquad z = 2(t^3 - 3at).$$

cubiques dont le lieu des milieux des cordes est la surface étudiée.

Remarquons que, pour toutes les surfaces qui admettent une infinité de modes de génération comme surfaces de translation, cette même remarque donne *une* famille de lignes asymptotiques, sans aucune intégration.

Pour la surface réglée du troisième degré que nous venons d'étudier, la théorie des complexes et congruences linéaires donne, elle aussi, une voie détournée pour arriver aux asymptotiques. Enfin, nous déduisons des équations (82) des équations propres à définir une surface qui n'a que deux modes de translation, à savoir :

$$(85)\quad \begin{cases} x = t_1 - t_3 & = t_4 - t_2, \\ y = t_1^2 - t_3^2 + a & = t_4^2 - t_2^2 - a, \\ z = t_1^3 - t_3^3 + \dfrac{3a}{2}(t_1 + t_3) & = t_4^3 - t_2^3 - \dfrac{3a}{2}(t_2 + t_4). \end{cases}$$

Un calcul facile conduit à l'équation

$$(86)\qquad x^4 + 3y^2 - 4xz - 3a^2 = 0.$$

On doit supposer a différent de zéro, car pour $a = 0$ on voit immédiatement que les deux modes de génération n'en font qu'un. On peut supposer a positif, puisque l'équation (86) ne contient que a^2; alors, en remplaçant x par $x\sqrt{a}$, y par ay et z par $az\sqrt{a}$, le paramètre a disparaît ou plutôt est remplacé par l'unité. Nous avons ainsi une surface du quatrième ordre à centre, sur laquelle les quatre courbes t_1, t_2, t_3, t_4 qui passent par un point sont toujours réelles.

En changeant x, y, z en ix, iy, iz nous obtenons une nouvelle surface réelle à réseaux tous imaginaires

$$(87)\qquad x^4 - 3y^2 + 4xz - 3 = 0.$$

Enfin, le changement de a en ia nous conduit à deux nouvelles surfaces, à réseaux tous imaginaires, mais toujours réelles:

$$(88)\qquad \begin{cases} x^4 + 3y^2 - 4xz + 3 = 0, \\ x^4 - 3y^2 + 4xz + 3 = 0. \end{cases}$$

Ce cas correspond à une quartique Q décomposée en deux paraboles surosculatrices, imaginaires conjuguées :

$$x_1^2 - 2py - bi = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 - 2py + bi = 0.$$

Nous avons ainsi épuisé tous les cas de surfaces algébriques, dans l'espace ordinaire, et indiqué tous les types canoniques auxquels elles peuvent être réduites par une transformation *réelle*. Je récapitule ces types :

$$
\begin{array}{ll}
\text{(I)} & z(x^2+y^2) - (x+z) = 0, \\
\text{(II)} & z(x^2+y^2) + x + z = 0, \\
\text{(III)} & xyz + x + y + z = 0, \\
\text{(IV)} & xyz - (x + y + z) = 0, \\
\text{(V)} & x^3y - 3(x^2 + xy + yz) + 3 = 0, \\
\text{(VI)} & x^3y + 3(x^2 + xy + yz) + 3 = 0, \\
\text{(VII)} & 4z + 180x - 5xy^2 + 20x^3 + x^5 = 0, \\
\text{(VIII)} & 4z + 180x + 5xy^2 - 20x^3 + x^5 = 0, \\
\text{(IX)} & 4z + 180x - 5xy^2 - 20x^3 + x^5 = 0, \\
\text{(X)} & 4z + 180x + 5xy^2 + 20x^3 + x^5 = 0, \\
\text{(XI)} & 4z - 5xy^2 + x^5 = 0, \\
\text{(XII)} & 4z + 5xy^2 + x^5 = 0, \\
\text{(XIII)} & 2z - y^2 - 2x^2y + x^4 = 0, \\
\text{(XIV)} & z(x^2 - y) - 2x = 0, \\
\text{(XV)} & 2z + x^3 - 3xy = 0, \\
\text{(XVI)} & x^4 + 3y^2 - 4xz - 3 = 0, \\
\text{(XVII)} & x^4 - 3y^2 + 4xz - 3 = 0, \\
\text{(XVIII)} & x^4 + 3y^2 - 4xz + 3 = 0, \\
\text{(XIX)} & x^4 - 3y^2 + 4xz + 3 = 0, \\
\text{(XX)} & 2z = x^2 + y^2, \\
\text{(XXI)} & 2z = x^2 - y^2.
\end{array}
$$

Dans ces 21 types, la substitution

$$(89)\qquad \begin{cases} x = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d, \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d', \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 + d'', \end{cases}$$

où les lettres a, b, ..., d'' sont des constantes réelles arbitraires, donne les surfaces les plus générales.

Si l'on admet des substitutions à coefficients imaginaires, le nombre des types canoniques s'abaisse, on obtient seulement 9 types, par exemple :

$$(90)\qquad \begin{cases} xyz + x + y + z = 0, \\ x^3y - 3(x^2 + xy + yz) + 3 = 0, \\ 4z + 180x - 5xy^2 + 20x^3 + x^5 = 0, \\ 4z - 5xy^2 + x^5 = 0, \\ 2z - y^2 - 2x^2y + x^4 = 0, \\ z(x^2 - y) - 2x = 0, \\ 2z + x^3 - 3xy = 0, \\ x^4 + 3y^2 - 4xz - 3 = 0, \\ 2z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Il est intéressant de remarquer que les sept premiers types du Tableau (90) sont les surfaces canoniques auxquelles on peut réduire la surface lieu du milieu des cordes de la cubique gauche générale, ou de la quartique ou de la quintique unicursales précisées plus haut.

10. Les surfaces transcendantes qui admettent plusieurs générations comme surfaces de translation possèdent des propriétés importantes.

Je vais traiter un cas particulier, celui qui donne des surfaces minima. Une telle surface possède déjà un mode de génération, par des courbes minima associées, dont le cône directeur des tangentes est le cône isotrope; donc si la surface admet un second mode de génération, on sera dans le cas où non seulement la quartique Q se décompose en deux coniques, mais encore où la surface admet une infinité de générations. Si l'on se reporte aux explications du paragraphe **1**, chacun de ces modes est fourni par des courbes dont le cône directeur des tangentes est du second degré; tous ces cônes engendrent un faisceau ponctuel dont l'un des cônes de base est le cône isotrope. Tous ces cônes ont donc les mêmes axes de symétrie et, en les prenant pour axes de coordonnées, puis coupant par le plan $z = 1$, nous avons des coniques sous forme réduite et le calcul est presque immédiat.

Quelques explications sont nécessaires pour la discussion de réalité : sans particulariser les axes, supposons que l'un des cônes directeurs ait pour équation

$$(91)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Au paragraphe **2**, j'ai expliqué qu'on peut définir la surface au moyen de deux cônes *quelconques* du faisceau. Il s'agit de montrer que, si la surface est réelle, on peut se borner à un cône réel (tout au moins d'équation à coefficients réels) et au cône isotrope. En effet, si la surface est réelle et si le cône (91) n'est pas d'équation réelle, l'équation imaginaire conjuguée

$$(92)\quad A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy = 0$$

représente un cône qui, associé au cône isotrope, doit conduire à la surface conjuguée, donc à la surface primitive, qui est supposée réelle. Donc le faisceau (91) et (92) contient le cône isotrope : on aura donc

$$(93)\quad \begin{cases} A_1 = \lambda A + \mu, & A'_1 = \lambda A' + \mu, & A''_1 = \lambda A'' + \mu, \\ B_1 = \lambda B, & B'_1 = \lambda B', & B''_1 = \lambda B''; \end{cases}$$

je peux supposer les axes pris de sorte que B, B′, B″ ne soient pas nuls; autrement dit, j'évite provisoirement de choisir les axes de symétrie du cône (91); alors, d'après (93), λ est une imaginaire de module égal à 1, soit $e^{i\varphi}$. Je puis donc écrire $B_1 e^{-\frac{i\varphi}{2}} = Be^{\frac{i\varphi}{2}}$ et, en multipliant le premier membre de (91) par $e^{\frac{i\varphi}{2}}$, je puis supposer $\lambda = 1$, c'est-à-dire B, B′, B″ réels. Les relations

$$A_1 - A = A'_1 - A' = A''_1 - A'' = \mu$$

montrent que A, A′, A″ ont même partie imaginaire, soit ia; si donc je retranche $ia(x^2 + y^2 + z^2)$ du premier membre de (91), je remplace le cône par un autre du faisceau et ce nouveau cône a une équation à coefficients réels.

A partir de ce moment, j'ai le droit de prendre pour axes de coordonnées les axes de symétrie du cône considéré; si nous supposons d'abord ce cône non de révolution, les trois axes sont uniques, réels et l'équation (91) se réduit à

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0$$

avec $A \neq A' \neq A''$; je supposerai le nom des axes choisis de sorte que le coefficient moyen, quand on range A, A′, A″ par ordre de grandeur soit A″. Alors le cône particulier

(94) $$(A - A'')x^2 + (A' - A'')y^2 = 0$$

se décompose en deux plans réels dont j'écris l'équation sous la forme $y^2 - m^2x^2 = 0$, où m est réel. Je prends donc pour équation de la quartique Q

(95) $$(y^2 - m^2x^2)(x^2 + y^2 + 1) = 0.$$

Sur l'une ou l'autre droite $y = \pm mx$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2 + y^2 + 1).$$

Sur la droite $y = mx$, on aura

$$X_1 = \int \frac{dx}{2m(x^2+y^2+1)}, \quad Y_1 = \int \frac{dx}{2(x^2+y^2+1)},$$
$$Z_1 = \int \frac{dx}{2mx(x^2+y^2+1)}.$$

Sur la droite $y = -mx$, on aura

$$X_2 = \int \frac{-dx}{2m(x^2+y^2+1)}, \quad Y_2 = \int \frac{dx}{2(x^2+y^2+1)},$$
$$Z_2 = \int \frac{-dx}{2mx(x^2+y^2+1)}.$$

Je multiplierai, pour plus d'élégance, X_1, Y_1, ..., Z_2 par $2m$.

Pour X_1, Y_1, Z_1, j'écrirai $x = \rho_1 \cos\alpha$, $y = \rho_1 \sin\alpha$, $m = \operatorname{tang}\alpha$:

$$(95)\qquad \begin{cases} X_1 = \displaystyle\int \frac{d\rho_1 \times \cos\alpha}{\rho_1^2 + 1} = \cos\alpha \times \operatorname{arc\,tang}\rho_1, \\ Y_1 = \sin\alpha \times \operatorname{arc\,tang}\rho_1, \\ Z_1 = \displaystyle\int \frac{d\rho_1}{\rho_1(\rho_1^2+1)} = \mathrm{L}\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2+1}}. \end{cases}$$

J'aurai évidemment

$$(96)\qquad \begin{cases} X_2 = -\cos\alpha \times \operatorname{arc\,tang}\rho_2, \\ Y_2 = \sin\alpha \times \operatorname{arc\,tang}\rho_2, \\ Z_2 = -\mathrm{L}\dfrac{\rho_2}{\sqrt{\rho_2^2+1}}. \end{cases}$$

Si je pose $\rho_1 = \operatorname{tang}\varphi_1$, on a $\sin\varphi_1 = \dfrac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2+1}}$, donc j'ai les formules paramétriques, pour définir la surface minima la plus générale de ce type, sauf homothétie par rapport à l'origine puis déplacement :

$$(97)\quad \begin{cases} X = \cos\alpha(\varphi_1 - \varphi_2), \\ Y = \sin\alpha(\varphi_1 + \varphi_2), \\ Z = L\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}. \end{cases}$$

En multipliant dans les formules (97) X, Y, Z par h, on a une surface répondant aussi à la question; la surface ne peut être réelle que si h est réelle : car d'après le paragraphe 1, la trace sur le plan $z = 1$ du plan mené de l'origine parallèlement au plan tangent au point (φ_1, φ_2) coupe la droite $y = mx$ au point

$$x = \cos\alpha \operatorname{tang}\varphi_1, \qquad y = \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi_1;$$

or si le point (φ_1, φ_2) de la surface est réel, le plan tangent est réel, donc φ_1 est réel; de même φ_2; donc si la surface est réelle, h est réel.

Les formules (97) donnent la génération particulière par courbes planes réelles; si l'on met en évidence, par des calculs simples que j'omets, les autres systèmes de courbes de translation, la surface sera définie comme lieu des milieux des cordes d'une série de courbes gauches à un paramètre, qui sont précisément une des deux familles d'asymptotiques. L'élimination de φ_1 et φ_2 est facile et donne, en remplaçant $\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}, \frac{Z}{2}$ par $\frac{X}{h}, \frac{Y}{h}, \frac{Z}{h}$, l'équation

$$(98)\qquad \operatorname{th}\left(\frac{Z}{h}\right) = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{X}{h\cos\alpha}\right)}{\operatorname{tang}\left(\dfrac{Y}{h\sin\alpha}\right)}.$$

Dans cette équation on peut, si l'on veut, remplacer $\frac{Y}{h\sin\alpha}$ par $\frac{\pi}{2} - \frac{Y}{h\sin\alpha}$ et l'on a la forme équivalente

$$\text{th}\,\frac{Z}{h} = \text{tang}\left(\frac{X}{h\cos\alpha}\right)\text{tang}\left(\frac{Y}{h\sin\alpha}\right) \tag{99}$$

indiquée page 363, tome I, 2[e] édition de la *Théorie des Surfaces* de M. Darboux.

La surface (98) contient un paramètre de *forme* α et un paramètre de *grandeur* h; dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il sera plus simple de garder les formules (97) et de remarquer que $\varphi_1 = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\varphi_2 = \frac{Y-X}{\sqrt{2}}$ sont les coordonnées rectangulaires nouvelles quand on prend pour nouveaux axes dans le plan horizontal les bissectrices des anciens, de sorte qu'avec ces nouveaux axes on pourra écrire l'équation de cette surface particulière sous la forme elégante, signalée par Scherk,

$$e^z = \frac{\sin x}{\sin y}, \tag{100}$$

de sorte que l'on peut, si l'on revient à l'état d'esprit initial de cette étude, en négligeant une transformation homographique telle que (89), adopter cette forme (100) comme type canonique des surfaces de Lie correspondant à deux coniques admettant quatre points d'intersection distincts, mais tous imaginaires.

Dans le cas où, ne cherchant plus en particulier les surfaces minima, on désire avoir des coniques à points d'intersection tous réels et distincts, il n'y a qu'à revenir aux deux coniques

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \qquad y^2 - m^2x^2 = 0$$

et à remplacer x et y par ix et iy. La surface (100) est remplacée alors par la surface

$$e^z = \frac{\text{sh}\,x}{\text{sh}\,y}, \tag{101}$$

équation qui peut s'écrire,

$$e^{x+y+z} + e^{x+z-y} - e^{2x} = 1,$$

de sorte que l'on arrive, en tenant compte de tous les cas de réalité possible, aux trois types canoniques de forme si élégante

$$(102)\qquad \begin{cases} e^{x} + e^{y} + e^{z} = 1, \\ e^{x} + e^{y} - e^{z} = 1, \\ e^{x} - e^{y} - e^{z} = 1, \end{cases}$$

dont le premier est signalé par M. Darboux (*loc. cit.*); Sophus Lie indique diverses propriétés de ces surfaces et de celles obtenues simultanément

$$A e^{y+z} + B e^{z+x} + C e^{x+y} + L e^{x} + M e^{y} + N e^{z} = 0.$$

en conservant celles qui n'ont que *deux* modes de génération.

Quand la quartique Q se décompose en deux coniques bitangentes, on obtient comme surface minima l'hélicoïde minimum déterminé directement comme exemple au n° 4.

11. J'indique enfin un type simple de surface algébrique dans l'espace à $n+1$ dimensions $(n>2)$ admettant un double mode de génération comme surface de translation.

Je considère l'équation algébrique

$$(103)\qquad \begin{aligned} &(2n+1)A_0 t^{2n} \\ &\quad + 2n A_1 t^{2n-1} + \ldots + (n+1) A_n t^n \\ &\quad + \lambda_1 t^{n-1} + \lambda_2 t^{n-2} + \ldots + \lambda_n = 0, \end{aligned}$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont $\underline{n+1}$ constantes fixes et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des variables indépendantes en nombre n. Les racines $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ de l'équation (103) sont fonctions des λ; je désigne par S_p la somme des produits p à p des t_i et $\sum_p$ la somme $\sum_1^{2n} t_i^p$; nous remarquerons que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont indépendantes des λ, par suite aussi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, d'après les formules bien connues de la théorie des fonctions symétriques.

Considérons maintenant l'expression

$$U = A_0 \Sigma_{2n+1} + A_1 \Sigma_{2n} + \ldots + A_n \Sigma_{n+1}. \tag{104}$$

On verrait assez aisément qu'elle s'exprime uniquement au moyen de $A_0, A_1, \ldots, A_n$ quand on lui applique les formules rappelées à l'instant. Mais, sans calculer exactement cette expression U, vérifions que $dU = 0$. On a manifestement

$$dU = \sum \frac{\partial U}{\partial t_i} dt_i,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t_i} &= (2n+1)A_0 t_i^{2n} + 2nA_1 t_i^{2n-1} + \ldots + (n+1)A_n t_i^n \\ &= -(\lambda_1 t_i^{n-1} + \lambda_2 t_i^{n-2} + \ldots + \lambda_n);\end{aligned}$$

'où

$$-dU = \lambda_1 \Sigma t_i^{n-1} dt_i + \lambda_2 \Sigma t_i^{n-2} dt_i + \ldots + \lambda_n \Sigma dt_i.$$

Or la constance de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ permet d'écrire

$$\Sigma dt_i = 0, \qquad \Sigma t_i dt_i = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma t_i^{n-1} dt_i = 0;$$

donc on a bien $dU = 0$ et U est une constante. Si donc on pose

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 + \ldots + t_n, \\ x_2 &= t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= t_1^n + t_2^n + \ldots + t_n^n, \\ x_{n+1} &= A_0 \sum_1^n t_i^{2n+1} + A_1 \sum_1^n t_i^{2n} + \ldots + A_n \sum_1^n t_i^{n+1}; \end{aligned}\right. \tag{105}$$

la surface ainsi obtenue dans l'espace à $n+1$ dimensions est doublement de translation, quelles que soient les constantes A_0, A_1, ..., A_n (le calcul, il est vrai, ne le démontre que si $A_0 \neq 0$). Si l'on suppose $A_0 \neq 0$, le calcul déjà fait montre que, si l'on désigne Σ_i par $2B_i$ et U par $2B_{n+1}$, le point $(B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1})$ est centre de symétrie de la surface, qui admet donc un second mode de génération.

Si $A_0 = 0$, la surface cesse d'avoir un centre, mais elle reste du type de Lie. On remarquera même que si A_1 est nul en même temps que A_0, la surface devient réglée; en effet, d'après la théorie des fonctions symetriques appliquée aux n variables t_1, t_2, ..., t_n, l'expression x_{n+1} s'exprime rationnellement en x_1, x_2, ..., x_n, et si chacune de ces expressions x_1, x_2, ..., x_n a pour poids son indice, x_{n+1} contiendra, si $A_0 = A_1 = 0$, des termes de poids au plus égal à $2n-1$, donc ne peut contenir que des termes du premier degré en x_n; en égalant x_1, x_2, ..., x_{n-1} à des constantes arbitraires, on aura les génératrices rectilignes de la surface. Si l'on suppose même

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0,$$

la surface réglée particuliere devient tout à fait l'homologue de la surface de Cayley; elle admet cette fois non plus seulement deux modes de génération, mais une infinité à $n-1$ paramètres. C'est ainsi qu'en se bornant à $n = 3$, la surface définie par les expressions parametriques

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 + t_3,\\ x_2 &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - \alpha,\\ x_3 &= t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 - \frac{3\alpha}{4}(t_1 + t_2 + t_3) - \beta,\\ x_4 &= t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 - \alpha\,(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - \frac{4\beta}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{\alpha^2}{2}\end{aligned}\right.$$

décrit une surface, *indépendante des valeurs numériques de* α et β, représentée par l'équation

$$x_4 = \frac{4}{3} x_1 x_3 - x_2 x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^4}{6}. \tag{107}$$

Cette surface sera donc aussi le lieu du centre de gravité de trois points arbitraires pris sur la courbe unicursale

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3t, \qquad x_2 = 3t^2 - \alpha, \qquad x_3 = 3t^3 - \frac{9\alpha}{4} t - \beta, \\ \qquad x_4 = 3t^4 - 3\alpha t^2 - 4\beta t + \frac{\alpha^2}{2}. \end{array} \right. \tag{108}$$

Le raisonnement du début associe à cette surface (107) une famille de surfaces à deux paramètres α et β n'ayant cette fois que deux modes de génération.

Nous avons obtenu ainsi des types algébriques intéressants; un type non moins intéressant est constitué par le paraboloïde

$$x_{n+1} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$