

R. GARNIER

Deux notes de géométrie vectorielle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20 (1920), p. 341-347

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__341_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B12c]

DEUX NOTES DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE ⁽¹⁾;

PAR M. R. GARNIER.

I. *La formule d'Euler-Savary* ⁽²⁾. — Soit Σ une

⁽¹⁾ Les méthodes de la géométrie vectorielle sont encore peu familières à la plupart des étudiants français. C'est pour contribuer à les répandre que nous les avons appliquées ici à deux exemples qui nécessitent souvent, soit de pénibles calculs, soit encore des constructions géométriques assez cachées ou peu rigoureuses. Comme notations, nous avons adopté celles de l'excellent Traité de Burali-Forti et Marcolongo (*Éléments de Calcul vectoriel*; trad. par S. Lattès; Paris, Hermann, 1910).

⁽²⁾ Au sujet de cette formule, on nous permettra de rappeler la belle démonstration de M. G. Kœnigs (*Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. XXXI, 1907); par sa simplicité et sa précision, elle devrait être classique.

sphère de centre O et de rayon 1; pour établir la formule d'Euler-Savary sur Σ , nous appliquerons les formules fondamentales de la composition des mouvements à un point mobile M qui coïnciderait constamment avec le point de contact de la courbe (mobile) C avec son enveloppe (fixe) C_1 .

1. Soit $\mathbf{t}$ un vecteur unitaire, porté *dans un sens arbitraire* (mais variant avec continuité) par la tangente commune à C et à C_1 ; désignons par :

$\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{t}$ et $\mathbf{j}_1$ la vitesse et l'accélération (absolues) de M sur C_1 ;

$\mathbf{v} = v \mathbf{t}$ et $\mathbf{j}$ la vitesse et l'accélération (relatives) de M sur C ;

Ω la rotation instantanée, de module ω .

Posons encore

$$\mathbf{I} = \mathbf{O} + \frac{\Omega}{\omega},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{O} + \mathbf{r},$$

d'où

$$\mathbf{r} \times \mathbf{t} = 0,$$

et faisons enfin

$$(1) \quad \mathbf{n} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}.$$

Ces notations introduites, la formule de la composition des mouvements pour le premier ordre s'écrira

$$(2) \quad v_1 \mathbf{t} = (\Omega \wedge \mathbf{r}) + v \mathbf{t};$$

l'arc de grand cercle IM est donc orthogonal à C et à C_1 en M , et l'on peut poser, en conséquence,

$$(3) \quad \Omega = \omega (\mathbf{r} \cos \lambda + \mathbf{n} \sin \lambda);$$

λ désignera la distance sphérique IM , comptée à partir de M dans la direction $\mathbf{n}$. Multipliée ($\times$) par $\mathbf{t}$, la relation (2) donne alors

$$(4) \quad v_1 = \omega \sin \lambda + v.$$

Appelons enfin $\mathbf{p}$ un vecteur unitaire dirigé suivant la normale principale à C , *dans un sens arbitraire*; on pourra écrire

$$\mathbf{p} = -\mathbf{r} \sin \varphi + \mathbf{n} \cos \varphi,$$

$\sin \varphi$ désignant le rayon de courbure de $C^{(1)}$; et, si l'on affecte d'accents les dérivées par rapport au temps, la première formule de Frenet donnera

$$(5) \quad \mathbf{t}' = -v\mathbf{r} + v \cot \varphi \mathbf{n}.$$

2. Écrivons maintenant la relation de composition pour le second ordre, soit :

$$\mathbf{j}_1 = (\Omega' \wedge \mathbf{r}) + (\Omega \times \mathbf{r}) \Omega - \omega^2 \mathbf{r} + 2(\Omega \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{j},$$

et multiplions intérieurement les deux membres de la relation par $\mathbf{n}$; nous aurons successivement, d'après les propriétés de l'accélération, les équations (1), (3), (5) et la relation $\mathbf{n} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{t}$:

$$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{n} = v_1^2 \cot \varphi_1, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{n} = v^2 \cot \varphi,$$

$$\begin{aligned} (\Omega' \wedge \mathbf{r}) \mathbf{n} &= \omega [(\mathbf{r}' \cos \lambda + \mathbf{n}' \sin \lambda) \wedge \mathbf{r}] \mathbf{n} \\ &= -\omega v \cos \lambda + \omega \sin \lambda (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}) \mathbf{n}' \\ &= -\omega v \cos \lambda - \omega \sin \lambda \mathbf{t} \times \mathbf{n}' \\ &= -\omega v \cos \lambda + \omega v \sin \lambda \cot \varphi, \end{aligned}$$

$$\Omega \times \mathbf{r} \cdot \Omega \times \mathbf{n} = \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda,$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = 0,$$

$$(\Omega \wedge \mathbf{v}) \mathbf{n} = \omega v [(\mathbf{r} \cos \lambda + \mathbf{n} \sin \lambda) \wedge \mathbf{t}] \mathbf{n} = \omega v \cos \lambda;$$

d'où

$$\begin{aligned} v_1^2 \cot \varphi_1 &= \omega v \cos \lambda + \omega v \sin \lambda \cot \varphi + \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda + v^2 \cot \varphi \\ &= (v \cot \varphi + \omega \cos \lambda)(v + \omega \sin \lambda), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (4),

$$(6) \quad v_1 \cot \varphi_1 - v \cot \varphi = \omega \cos \lambda.$$

3. En particulier, faisons $M = I$, d'où $\lambda = 0$; $\mathbf{v}_1$

(1) De sorte que $O + \mathbf{r} + \mathbf{p} \sin \varphi$ désignera le centre de courbure de C .

et $\mathbf{v}$ seront égaux tous deux à

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)',$$

tandis que $\sin \varphi_1$ et $\sin \varphi$ devront être remplacés respectivement par $\sin \varphi_f$ et $\sin \varphi_m$, rayons de courbure respectifs de la base et de la roulante. La formule (6) donnera alors

$$(7) \quad \omega (\cot \varphi_f - \cot \varphi_m) = \omega;$$

on aura ensuite, en posant

$$\mathbf{w} \times \mathbf{t} = \omega \cos \varphi,$$

et en utilisant (1), (3) et (5) :

$$\begin{aligned} (8) \quad \omega \cos \varphi &= \frac{1}{\omega} (\Omega' \times \mathbf{t}) - \frac{\omega'}{\omega^2} (\Omega \times \mathbf{t}) \\ &= (\mathbf{r}' \cos \lambda + \mathbf{n}' \sin \lambda) \times \mathbf{t} \\ &= \nu \cos \lambda - \sin \lambda \mathbf{n} \times \mathbf{t}' = \nu \frac{\sin(\varphi - \lambda)}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

Ceci fait, il suffira de rapprocher (4), (7) et (8) pour en déduire

$$\begin{aligned} \cot \varphi_1 - \cot \varphi &= \frac{\omega}{\nu} (\cos \lambda - \sin \lambda \cot \varphi_1) \\ &= \frac{\omega}{\nu} \frac{\sin(\varphi_1 - \lambda)}{\sin \varphi_1} (\cot \varphi_f - \cot \varphi_m) \\ &= \frac{\sin(\varphi - \lambda) \sin(\varphi_1 - \lambda)}{\sin \varphi \sin \varphi_1} \frac{\cot \varphi_f - \cot \varphi_m}{\cos \varphi}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\cos \varphi [\cot(\varphi_1 - \lambda) - \cot(\varphi - \lambda)] = \cot \varphi_f - \cot \varphi_m.$$

C'est la formule d'Euler-Savary pour la sphère.

Il importe d'observer que *cette formule est indépendante des conventions de sens adoptées au début* : effectivement, un changement de sens effectué sur $\mathbf{t}$ remplace λ par $-\lambda$, φ par $\pi - \varphi$, φ_1 et φ par $\pi - \varphi_1$ et $\pi - \varphi$; un résultat analogue s'applique à $\mathbf{w}$; enfin, un changement de sens sur $\mathbf{p}$ (ou $\mathbf{p}_1$) remplace φ par $\pi + \varphi$

(ou ρ_1 par $\pi + \rho_1$). Aucune de ces modifications ne change la formule ; la méthode vectorielle, et c'est là son grand avantage, affranchit donc le résultat de toute erreur de signe.

II. *Les surfaces apsidales.* — Soient O le pôle de la transformation, $M = O + \mathbf{r}$ un point d'une surface S, $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire porté par la normale MN à S en M. Au point M, la transformation associe un point $M_1 = O + \mathbf{r}_1$ tel que

$$(1) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = 0,$$

$$(2) \quad (\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}_1) \mathbf{n} = 0,$$

$$(3) \quad r_1 = r.$$

Nous allons déterminer le vecteur unitaire $\mathbf{n}_1$ porté par la normale $M_1 N_1$ à la surface S_1 , lieu du point M_1 .

Tout d'abord, l'équation (2) donne

$$\mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{r} + \mu \mathbf{n};$$

posons

$$(4) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{n} = r \cos V;$$

en vertu de (1), nous aurons

$$\lambda r + \mu \cos V = 0,$$

puis, en vertu de (3),

$$\mu^2 \sin^2 V = r^2.$$

On pourra donc écrire, par exemple,

$$\lambda = -\cot V, \quad \mu = \frac{r}{\sin V},$$

et l'on aura

$$(5) \quad \mathbf{r} \cos V + \mathbf{r}_1 \sin V = r \mathbf{n}.$$

Multiplions ($\times$) cette équation par $\mathbf{n}$ et tenons compte de (4); il viendra

$$(4)_1 \quad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{n} = r \sin V.$$

Ceci posé, l'équation (5), différenciée, devient
 $\cos V d\mathbf{r} + \sin V d\mathbf{r}_1 + (-\mathbf{r} \sin V + \mathbf{r}_1 \cos V) dV = r d\mathbf{n} + \mathbf{n} dr$,
 et, après multiplication intérieure par $\mathbf{n}$, on en déduit

$$\sin V \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_1 = dr = \frac{1}{r} r_1 dr_1 = \frac{1}{r} \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1,$$

c'est-à-dire

$$\left(\mathbf{n} \sin V - \frac{\mathbf{r}_1}{r} \right) \times d\mathbf{r}_1 = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit $d\mathbf{r}_1$,
 on en tire

$$(6) \quad \mathbf{n}_1 = \rho \left(\mathbf{n} \sin V - \frac{\mathbf{r}_1}{r} \right);$$

les normales MN et $\mathbf{M}_1 \mathbf{N}_1$ sont donc *coplanaires*; elles
 sont en outre *rectangulaires*, car, d'après (6) et (4),
 on a

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = 0.$$

Enfin, en exprimant que $n_1 = 1$, on trouve

$$\rho^2 \cos^2 V = 1;$$

on pourra donc écrire

$$(7) \quad \mathbf{n} \sin V + \mathbf{n}_1 \cos V = \frac{\mathbf{r}_1}{r}.$$

Le caractère involutif de la transformation résulte des
 formules (5) et (7) qui peuvent encore s'écrire, si l'on
 préfère :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 \sin V = -\mathbf{r} \cos V + r\mathbf{n}, \\ r\mathbf{n}_1 \sin V = -\mathbf{r} + r\mathbf{n} \cos V, \\ \mathbf{r} \sin(-V) = -\mathbf{r}_1 \cos(-V) + r\mathbf{n}_1, \\ r\mathbf{n} \sin(-V) = -\mathbf{r}_1 + r\mathbf{n}_1 \cos(-V), \end{cases}$$

ainsi que des formules (1), (2), (3) et de la suivante :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = r \cos V = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{n}_1.$$

Ces mêmes formules permettent encore de démontrer

aisément la permutabilité des transformations apsidale
et par polaires réciproques relativement à une sphère
de centre O.