

Certificat de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__307_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les coordonnées rectangulaires (x_1, x_2, x_3) d'un point M d'une courbe C sont données par les formules*

$$x_1 = \sin \omega [f'' \cos t + f' \sin t],$$

$$x_2 = \sin \omega [f'' \sin t - f' \cos t],$$

$$x_3 = \cos \omega [f + f''],$$

où ω est une constante et f une fonction de t .

1° Déterminer la fonction f de telle sorte que les tangentes à la courbe appartiennent à un complexe linéaire donné Γ .

2° Montrer que, dans ce cas, les normales principales à la courbe C rencontrent une droite fixe.

3° Trouver les lignes asymptotiques de la surface réglée formée par les normales principales à la courbe C.

4° Comment doit-on choisir le complexe Γ pour que la courbe C soit cylindrique?

SOLUTION. — 1° Les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\tau_1 = \sin \omega \cos t, \quad \tau_2 = \sin \omega \sin t, \quad \tau_3 = \cos \omega;$$

τ_3 est constant, en sorte que la courbe est une hélice portée par un cylindre de direction Ox_3 .

Les moments de la tangente par rapport aux axes sont :

$$\lambda_1 = -\sin \omega \cos \omega (f \sin t + f' \cos t),$$

$$\lambda_2 = \sin \omega \cos \omega (f \cos t - f' \sin t),$$

$$\lambda_3 = \sin^2 \omega f'.$$

Exprimons que la tangente appartient au complexe linéaire

$$A_1 \tau_1 + A_2 \tau_2 + A_3 \tau_3 + L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + L_3 \lambda_3 = 0,$$

et nous aurons pour déterminer f l'équation linéaire

$$(1) \quad f [L_3 \sin \omega - (L_1 \cos t + L_2 \sin t) \cos \omega] \\ + f \cos \omega (L_2 \cos t - L_1 \sin t) \\ + A_1 \cos t + A_2 \sin t + A_3 \cot \omega = 0,$$

dont l'intégration se ramène à des quadratures élémentaires.

2° Les cosinus directeurs de la binormale, puis ceux de la normale principale sont :

$$\beta_1 = \cos \omega \cos t, \quad \beta_2 = \cos \omega \sin t, \quad \beta_3 = -\sin \omega,$$

$$\nu_1 = -\sin t, \quad \nu_2 = \cos t, \quad \nu_3 = 0.$$

La normale principale à (C) a pour équations

$$X_1 \cos t + X_2 \sin t = f'' \sin \omega, \quad X_3 = \cos \omega (f + f'').$$

Exprimons que toutes les normales rencontrent la droite

$$X_1 = a X_3 + p, \quad X_2 = b X_3 + q,$$

et nous aurons la condition

$$f''[\sin \omega - \cos \omega (a \cos t + b \sin t)] - f \cos \omega (a \cos t + b \sin t) \\ - p \cos t - q \sin t = 0,$$

qui doit coïncider avec l'équation déduite de (1) par dérivation; l'identification donne linéairement a, b, p, q , en sorte que la droite fixe (D) prend pour équations

$$A_1 + L_1 X_3 - L_3 X_1 = 0, \quad A_2 + L_1 X_2 - L_2 X_3 = 0.$$

3° Les coordonnées d'un point de la surface réglée formée par les normales principales auront pour expressions paramétriques

$$\xi_1 = x_1 - u \sin t, \quad \xi_2 = x_2 + u \cos t, \quad \xi_3 = x_3.$$

Les asymptotiques comprennent d'une part les génératrices rectilignes $t = \text{const.}$, et d'autre part des courbes qui comprennent la courbe donnée (C) : ces courbes, qui dépendent en général d'une équation de Riccati, s'obtiendront par l'intégration d'une équation linéaire, soit par quadratures.

Les coefficients du plan tangent sont

$$A_1 = \beta_1, \quad A_2 = \beta_2, \quad A_3 = \beta_3 + \frac{u}{f' + f'''}.$$

L'équation des lignes asymptotiques s'écrit donc

$$(\sin t d\xi_1 - \cos t d\xi_2) \cos \omega dt - d\xi_3 d\left(\frac{u}{f' + f'''}\right) = 0,$$

ou, après suppression de la solution $dt = 0$,

$$2 \frac{du}{u} - \frac{f'' + f^{IV}}{f' + f'''} dt = 0;$$

il vient immédiatement

$$u^2 = C(f' + f''').$$

4° La courbe (C) est une hélice qui sera circulaire si

$$f'^2 + f''^2 = \text{const.},$$

c'est-à-dire si

$$f'' = 0 \quad \text{ou} \quad f' + f''' = 0;$$

droit ayant son sommet au-dessous de sa base, et dont la hauteur, évaluée à l'échelle du plan de front de l'axe, vaut 120.

Les rayons lumineux sont parallèle; L est leur point de fuite.

1° Déterminer les points principaux P et D.

2° Représenter le cône creux et opaque par son contour apparent perspectif.

3° Construire l'ombre propre du cône et l'ombre portée à son intérieur.

On déterminera un point quelconque de la courbe d'ombre portée, la tangente en ce point, ainsi que les points et tangentes remarquables.

NOTA. — *Dessiner les lignes d'ombre en noir fin, les lignes de construction en rouge fin continu. Mettre sur les ombres visibles des hachures fines, bleues ou grises, espacées d'environ 1^{mm},5.*

(Juin 1919.)