

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 222-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__222_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPERIEURE.

Grenoble.ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Étude générale de la fonction*

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)\sqrt{z}};$$

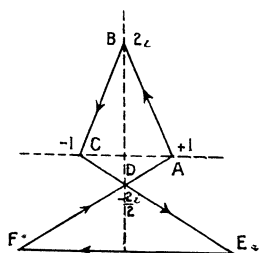
*points singuliers ?*2° *Calculer l'intégrale définie :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \sin x}{+ \sqrt{x}(x^2 + 1)} dx$$

(à cet effet, on étudiera l'intégrale $\int f(z) dz$ prise le long d'un contour convenablement choisi).

3° *On pose*

$$a = \int_0^1 \frac{\cos x \, dx}{+ \sqrt{x}(x^2 + 1)}, \quad b = \int_0^1 \frac{\sin x \, dx}{+ \sqrt{x}(x^2 + 1)}.$$



On demande l'expression, à l'aide de a et de b , de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + 1)\sqrt{z}},$$

c désignant un contour tel que ABCDEFDA, et $\sqrt{z}$ ayant la valeur $+1$ au point de départ A.

Nota. — Dans l'énoncé, x désigne une variable d'intégration essentiellement réelle.

SOLUTION. — 1° La fonction $f(z)$ admet deux pôles simples $z = \pm i$ et un point critique de branchement $z = 0$; une rotation de l'affixe de z autour de ce dernier point change le signe de la fonction.

Les résidus relatifs aux pôles $\pm i$ sont

$$R_1 = -\frac{e^{-1}}{2\sqrt{2}}(1+i), \quad R_2 = -\frac{e}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

2° Soit I l'intégrale demandée. Calculons $\int_{\Gamma} f(z) dz$ le long d'un contour Γ formé d'un cercle C de rayon très grand et de centre $z = 0$, qu'on quitte près de l'axe Ox pour décrire un lacet autour de l'origine. Nous avons

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i(R_1 + R_2).$$

Or l'intégrale prise le long de C et du cercle c du lacet tendent vers zéro, lorsque les rayons tendent respectivement vers l'infini et zéro. Il reste

$$-2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)} dx = 2\pi i(R_1 + R_2),$$

et l'on en déduit

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (\operatorname{sh} 1 + i \operatorname{ch} 1),$$

et

$$I = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}e}.$$

3° Considérons le lacet l allant du point $z = 1$ à l'origine

qu'il entoure. On a

$$\int_{ABCD} - \int_{\Gamma} = 2\pi i R_1,$$

$$\int_{DEFD} = -2\pi i R_2;$$

l'intégrale demandée est donc

$$\int_{\Gamma} + 2\pi i (R_1 - R_2),$$

ou

$$-2 \int_0^1 \frac{\cos x + i \sin x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx + \frac{2\pi i}{\sqrt{2}} (\operatorname{sh} 1 - i \operatorname{ch} 1),$$

ou enfin

$$(\pi \sqrt{2} \operatorname{ch} 1 - 2a) + i(\pi \sqrt{2} \operatorname{sh} 1 - 2b).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver deux nombres a et b tels que les deux fonctions

$$f(u) = e^{au} \frac{\sigma^2(u - \omega - \omega')}{\sigma^2 u},$$

$$g(u) = e^{bu} \frac{\sigma(u - \omega) \sigma(u - \omega')}{\sigma u \sigma(u - \omega - \omega')}.$$

admettent les périodes 2ω et $2\omega'$.

a et b étant ainsi déterminés, décomposer $f(u)$ et $g(u)$ en éléments simples; comparer les résultats obtenus.

SOLUTION. — Le changement de u en $u + 2\omega$ et en $u + 2\omega'$ multiplie respectivement

$$\begin{array}{lll} f(u) & \text{par} & e^{2a\omega - 4\eta\omega' - 4\eta\omega} \quad \text{et} \quad e^{2a\omega' - 4\eta'\omega - 4\eta'\omega'}, \\ g(u) & \text{par} & e^{2b\omega} \quad \text{et} \quad e^{2b\omega'}, \end{array}$$

ou, en tenant compte de la relation

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{1}{2} \pi i,$$

$$f(u) \quad \text{par} \quad e^{2\omega[a - 2(\eta + \eta')]} \quad \text{et} \quad e^{2\omega'[a - 2(\eta' + \eta)]},$$

De là les conditions

$$b = 0, \quad a = 2(\eta + \eta').$$

On a alors

$$f(u) = \sigma^2(\omega + \omega') \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \right)^2 = \sigma^2(\omega + \omega') [pu - e_2];$$

$$g(u) = - \frac{\sigma\omega \cdot \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')} \frac{\sigma_1 u}{\sigma u, \sigma_2 u} = - \frac{1}{2} \frac{\sigma\omega \cdot \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')} \frac{p'u}{pu - e_2},$$

$$g(u) = \frac{\sigma\omega \cdot \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')} [\zeta\omega + \zeta\omega' + \zeta u - \zeta(u + \omega + \omega')].$$

La comparaison des résultats montre que

$$\xi(u) = - \frac{1}{2} \frac{\sigma\omega \cdot \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')} \frac{d}{du} \text{Log} f(u).$$

(Juin 1919.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que sur la courbe générale du 3^e degré, il y a, en dehors des points d'inflexion, vingt-sept points en chacun desquels passe une conique ayant ses six points de rencontre avec la courbe confondus en ce point. Établir ensuite que ces vingt-sept points sont les points de contact des tangentes menées à la courbe par les points d'inflexion de celle-ci.*

II. *Démontrer que l'inversion de l'intégrale elliptique*

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{A u^3 + B u^2 + C u + D}} = z$$

conduit à une fonction uniforme doublement périodique $u(z)$ ayant un pôle double dans chaque parallélogramme des périodes.

En désignant par α un tel pôle, quels sont les coefficients de $\frac{1}{(z - \alpha)^2}$ et $\frac{1}{z - \alpha}$ dans le développement de $u(z)$ autour de α ?

Montrer ensuite qu'on peut choisir la constante μ de manière que, en posant

$$H(z) = \mu \int_{z_0}^z u(z) dz,$$

l'expression

$$e^{\int_{z_0}^z H(z) dz}$$

soit une fonction entière de z . En déduire que $u(z)$ peut se mettre sous la forme

$$u(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)},$$

$G(z)$ et $G_1(z)$ étant des fonctions entières de z , satisfaisant à des équations de la forme

$$\begin{aligned} G(z + \omega) &= e^{az+b} G(z), \\ G(z + \omega') &= e^{a'z+b'} G(z), \end{aligned}$$

les a et les b étant des constantes, et les ω les périodes de la fonction $u(z)$.

III. Étant donné un contour C et en supposant connue la fonction de Green relative à ce contour pour tout point intérieur, quelle est la formule permettant de trouver la fonction harmonique continue à l'intérieur et prenant des valeurs données sur C ?

Appliquer le résultat au cas où le contour C est une circonférence.

SOLUTION. — I. Soit la cubique prise sous la forme normale

$$x = pu, \quad y = p'u.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que six points soient sur une conique est que les paramètres de ces six points aient une somme égale à une période, et pour qu'ils soient confondus, qu'on ait

$$\begin{aligned} 6u &= 2K\omega + 2K'\omega', \\ u &= \frac{K}{6} 2\omega + \frac{K'}{6} 2\omega'. \end{aligned}$$

Chacun des entiers K et K' peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, ce qui donne $6^2 = 36$ points.

Parmi ces points se trouvent les neuf points d'inflexion, obtenus en considérant les tangentes d'inflexion comme des

droites doubles. Il reste $6^2 - 3^2 = 27$ points de contact de véritables coniques osculatrices.

Si ν est le paramètre d'un de ces points d'inflexion, on a

$$3\nu = \text{Période},$$

et si ω est le paramètre du point de contact de l'une des trois tangentes menées par ce point, on a

$$\nu + 2\omega = \text{Période}.$$

L'élimination de ν donne

$$6\omega = \text{Période}.$$

Les points ω sont donc ceux où la conique surosculatrice a un contact de cinquième ordre.

II. La double périodicité de $u(z)$ est établie dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard, 2^e vol., p. 38 (3^e édition), ainsi que l'existence d'un seul pôle double α dans un parallélogramme de périodes, pôle à résidu nul. Si l'on substitue le développement

$$u = \frac{z}{(z - \alpha)^2} + \beta + \gamma(z - \alpha) + \dots$$

dans la relation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = Au^3 + Bu^2 + Cu + D,$$

on obtient par identification

$$\alpha = \frac{4}{A}.$$

Par suite

$$H(z) = \int_{z_0}^z \mu u(z) dz = -\frac{4\mu}{A} \frac{1}{z - \alpha} + \text{Fonction entière de } z.$$

$\int_{z_0}^z H(z) dz$ contiendra un terme logarithmique, et

$$e^{\int_{z_0}^z H(z) dz}$$

contiendra le facteur $(z - \alpha)^{-\frac{4\mu}{A}}$. Cette dernière fonction

sera entière en z si $-\frac{4\mu}{A}$ est un entier positif m . D'où

$$\mu = -\frac{mA}{4}.$$

α sera un zéro d'ordre m pour l'exponentielle.

Soit $G(z)$ la valeur de $e^{\int_{z_0}^z H(z) dz}$ correspondant à $m=2$, fonction entière qui a pour racines doubles tous les pôles de $u(z)$ et n'en admet pas d'autres. La fonction

$$G_1(z) = G(z)u(z)$$

est une fonction entière, les pôles de $u(z)$ étant les racines de $G(z)$, au même ordre 2; G et G_1 ne peuvent avoir de racines communes, G n'ayant pour racines que les pôles de u et G_1 n'admettant plus ces racines.

Par dérivation logarithmique, on obtient

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = - \int_{z_0}^z \frac{A}{2} u(z) dz;$$

on en déduit, ω étant l'une des périodes de $u(z)$,

$$\frac{G'(z+\omega)}{G(z+\omega)} - \frac{G'(z)}{G(z)} = - \int_z^{z+\omega} \frac{A}{2} u(z) dz.$$

Le second membre ne dépend pas de z , à cause de la périodicité de $u(z)$ et de la nullité de ses résidus. Soit a sa valeur constante; une intégration donne, b étant une autre constante

$$G(z+\omega) = e^{az+b} G(z).$$

L'autre période ω' donnerait lieu à une relation analogue.

III. La formule fondamentale demandée est

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\text{Log } r \frac{dU}{dn} - U \frac{d \text{Log } r}{dn} \right) dS;$$

elle est établie notamment dans le *Traité* de M. Picard, 2^e vol., p. 14.

Le cas où C est une circonférence γ est aussi développé et

conduit à la formule

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{U(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi,$$

où l'on a $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, et où U sous le signe $\int$ est pris pour le point $(R \cos \psi, R \sin \psi)$ de la circonférence.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'intégrale elliptique de seconde espèce*

$$\int \frac{u du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}}$$

a deux périodes qui sont fonctions de x . Former l'équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients rationnels en x , à laquelle satisfont ces périodes.

SOLUTION. — Considérons les intégrales

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^x \frac{du}{\sqrt{R}}, & \Omega_1 &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{R}}, \\ H &= \int_0^x \frac{u du}{\sqrt{R}}, & H_1 &= \int_0^1 \frac{u du}{\sqrt{R}}, \\ L &= \int_0^x \frac{du}{(u-1)\sqrt{R}}, & L_1 &= \int_0^1 \frac{du}{(u-x)\sqrt{R}}; \end{aligned}$$

où $R = u(u-1)(u-x)$.

H et H_1 sont les périodes considérées.

1° On obtient par dérivation

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\Omega_1}{dx} &= \int_0^1 \frac{du}{(u-x)\sqrt{R}} = L_1, \\ 2 \frac{dH_1}{dx} &= \int_0^1 \frac{u du}{(u-x)\sqrt{R}} = \Omega_1 + x L_1, \end{aligned}$$

et l'on a identiquement

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sqrt{R}}{u-x} \right) = \frac{u^2 - 2ux + x}{2(u-x)\sqrt{R}},$$

ou

$$H_1 - x\Omega_1 + x(1-x)L_1 = 0.$$

Éliminons Ω_1 et L_1 entre les trois relations établies; à cet effet nous leur adjoindrons :

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 H_1}{dx^2} &= \frac{3L_1}{2} + x \frac{dL_1}{dx}, \\ \frac{dH_1}{dx} &= -\frac{3x-2}{2} L_1 + x(1-x) \frac{dL_1}{dx}. \end{aligned}$$

Il vient d'abord

$$\begin{aligned} 2x \frac{dH_1}{dx} &= H_1 + xL_1, \\ \frac{dH_1}{dx} &= 2(1-x) \frac{d^2 H_1}{dx^2} - \frac{1}{2} L_1, \end{aligned}$$

et enfin,

$$4x(1-x) \frac{d^2 H_1}{dx^2} - 4x \frac{dH_1}{dx} + H_1 = 0.$$

2° Posons

$$u = tx, \quad \rho = t(t-1)(tx-1).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\rho}}, \quad H = x \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{\rho}}, \quad L = \int_0^1 \frac{dt}{(tx-1)\sqrt{\rho}}; \\ 2x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \Omega + L &= 0; \\ 2x \frac{\partial H}{\partial x} + \Omega + L - H &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{tx-1} \right) &= \frac{t^2 x - 2t + 1}{2(tx-1)\sqrt{\rho}}; \\ H - \Omega + (x-1)L &= 0; \\ 2x \frac{d\Omega}{dx} + H + Lx &= 0, \quad 2 \frac{dH}{dx} + L = 0, \\ \frac{dH}{dx} - \frac{d\Omega}{dx} + L + (x-1) \frac{dL}{dx} &= 0; \\ 4x(1-x) \frac{d^2 H}{dx^2} - 4x \frac{dH}{dx} + H &= 0. \end{aligned}$$

On retrouve l'équation obtenue au 1°.

3° Cela devait être; car si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, on obtient

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \sqrt{y} \int_0^1 \frac{u \, du}{\sqrt{u(u-1)(uy-1)}} = \frac{H(y)}{\sqrt{y}}; \\ \frac{dH_1}{dx} &= -\sqrt{y} \left[y \frac{dH}{dy} - \frac{1}{2} H \right]; \\ \frac{d^2 H_1}{dx^2} &= \sqrt{y} \left[y^3 \frac{d^2 H}{dy^2} \pm y^2 \frac{dH}{dy} - \frac{1}{4} y H \right]; \end{aligned}$$

Multiplions ces égalités respectivement par 1, $-4x = -\frac{4}{y}$,
 $4x(1-x) = \frac{4(y-1)}{y^2}$,
 et ajoutons membre à membre; il vient :

$$\begin{aligned} 4x(1-x) \frac{d^2 H_1}{dx^2} - 4x \frac{dH_1}{dx} + H_1 \\ + \sqrt{y} \left[4y(1-y) \frac{d^2 H}{dy^2} - 4y \frac{dH}{dy} + H \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Donc $H_1(x)$ et $H(y)$ vérifient la même équation différentielle.
 (Juin 1919.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans une aire limitée par un contour C , et un point z_0 à l'intérieur de cette aire. On désigne par M le maximum de $|F(z)|$ sur C . Montrer que l'on a

$$|F(z_0)| < M.$$

Si l'on avait $|F(z_0)| = M$, que pourrait-on dire de la fonction $F(z)$?

II. Soit $f(x)$ une fonction continue de la variable réelle x dans l'intervalle (a, b) . Cette fonction peut-elle satisfaire aux conditions en nombre infini

$$\int_a^b f(x) x^n dx = 0,$$

n prenant les valeurs entières 0, 1, 2, ..., ∞ ?

III. ω et ω' étant deux constantes complexes, telles que

dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i soit positif, trouver toutes les fonctions $\theta(z)$, holomorphes dans tout le plan telles que :

$$\theta(z + \omega) = \theta(z), \quad \theta(z + \omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z + \omega')} \theta(z).$$

Le réseau de parallélogrammes correspondant à ω et ω' étant construit, combien l'équation $\theta(z) = 0$ a-t-elle de racines dans un parallélogramme ?

IV. Soit dans le plan xOy , un arc de courbe AB , correspondant à la relation

$$y = f(x) \quad (a < x < b),$$

montrer par un exemple qu'il existe des fonctions analytiques de $z = x + iy$, définies d'un côté de la courbe AB mais ne pouvant pas être prolongées analytiquement au delà de cette ligne.

SOLUTION. — I. La propriété est une conséquence de la formule de Cauchy :

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{F(z) dz}{z - z_0}.$$

Si l est la longueur de C et δ la moindre distance de z_0 à C , on a $|F(z_0)| \leq \frac{Ml}{2\pi\delta}$, et *a fortiori* $|F(z_0)| < M$.

Si $|F(z_0)| = M$, la fonction $F(z)$ est constante à l'intérieur de C ; si elle ne l'était pas, son module, dans un cercle suffisamment petit, de centre z_0 , serait inférieur à M ; et la valeur de $|F(z_0)|$, égale au module de la valeur moyenne de $F(z)$ dans ce cercle, ne saurait être M .

II. Les conditions admises entraînent évidemment la relation

$$\int_a^b f(x) P(x) dx = 0 \quad (b > a),$$

$P(x)$ étant un polynôme de degré quelconque. Supposons que ce polynôme soit celui qui, dans l'intervalle (a, b) diffère de $f(x)$, en module, de moins de ε , ε étant un nombre positif,

donné à l'avance aussi petit qu'on veut, soit $P(x, \varepsilon)$. Nous aurons

$$\int_a^b P^2(x, \varepsilon) dx = \int_a^b P(x, \varepsilon) [P(x, \varepsilon) - f(x)] dx \\ < \varepsilon \left| \int_a^b P(x, \varepsilon) dx \right|.$$

Faisons tendre ε vers zéro. Si $P(x, \varepsilon)$ ne tendait pas vers zéro, nous aurions une contradiction. Donc $f(x)$ est égal à zéro dans l'intervalle (a, b) .

III. Soit $\varphi(z) = \text{Log } \Theta(z)$; les zéros d'une fonction entière $\Theta(z)$ [s'il en existe] sont, d'après les relations de condition, distribués périodiquement dans le plan; soient $\alpha_1 \dots \alpha_n$ leurs arguments dans le parallélogramme (ω, ω') . On a

$$2\pi i n = \int d\varphi(z), \quad 2\pi i \sum a = \int z d\varphi(z),$$

les intégrales étant prises dans le sens direct le long d'un parallélogramme (ω, ω') . On obtient immédiatement :

$$n = 1, \quad a = \frac{\omega + \omega'}{2} + \text{Période}.$$

Considérons alors la fonction

$$\Theta_1(z) = e^{Az^2 + Bz} \sigma\left(z - \frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

la fonction σ étant construite avec les périodes (ω, ω') ; elle a le zéro de Θ et se reproduit multipliée par une exponentielle linéaire en z . Voyons s'il est possible de déterminer les coefficients A et B de manière que $\Theta_1(z)$ satisfasse aux conditions proposées. Nous obtenons les relations

$$\begin{aligned} \tau_i + A\omega &= 0, \\ \tau_i' + A\omega' &= -\frac{\pi i}{\omega}, \\ -\tau_i\omega' + \pi i + A\omega^2 + B\omega &= 0, \\ -\tau_i'\omega + \pi i + A\omega'^2 + B\omega' &= -\frac{\pi i\omega'}{\omega}. \end{aligned}$$

Comme $\tau_i\omega' - \tau_i'\omega = \pi i$, ces relations sont compatibles et

donnent

$$A = -\left(\frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta'}{\omega'} + \pi i\right), \quad B = \eta + \eta'.$$

La fonction $\frac{\theta}{\theta_1}$ est une fonction elliptique sans pôle et se réduit à une constante C. Donc

$$\theta(z) = Ce^{-\left(\frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta'}{\omega'} + \frac{\pi i}{\omega\omega'}\right)\frac{z^2}{2} + (\eta + \eta')z} \sigma\left(u - \frac{\omega + \omega'}{2}\right).$$

La symétrie est apparente, η et η' ne jouant pas des rôles symétriques; le coefficient de z^2 est $-\frac{\eta}{\omega}$.

IV. Considérons la série

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z},$$

dans laquelle : 1° les coefficients A_n sont tels que la série

$$\sum |A_n|$$

soit absolument convergente; 2° les points $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sont distribués sur l'arc AB de manière que, sur toute portion finie de cet arc, il y en ait une infinité.

$\varphi(z)$ est convergente en tout point non situé sur AB et représente une fonction holomorphe dans le domaine de ce point; mais le cercle de convergence relatif à ce point ne peut jamais contenir une portion de l'arc AB, si petite soit-elle. D'où l'impossibilité du prolongement analytique de $F(z)$ à travers la moindre portion de AB (Cf. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 2^e éd., p. 252-253).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Dans le plan xOy on considère la moitié supérieure du cercle de centre O et de rayon un situé au-dessus de Ox . — 1° Résoudre pour cette aire, le problème de Dirichlet, les valeurs données pour la fonction harmonique étant zéro pour le diamètre AB et un pour la demi-circonférence ACB (on pourra chercher à mettre la solution sous forme trigonométrique).

2° Quand le point $M(x, y)$ tend vers B suivant une direc-

tion telle que $MBO = \alpha$, quelle est en B la limite de la fonction harmonique?

SOLUTION. — 1° Le développement de Fourier

$$U = a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n,$$

nul pour $\theta = 0$ ou π quel que soit r compris entre 0 et 1, se réduit à

$$U = \sum_1^{\infty} b_n \sin n\theta r^n$$

Comme on doit avoir sur la demi-circonférence $U = 1$ et $r = 1$,

$$1 = \sum_1^{\infty} b_n \sin n\theta.$$

Or on sait que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2p+1)\theta}{2p+1}.$$

Il vient donc

$$U = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{r^{2p+1} \sin(2p+1)\theta}{2p+1} = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{2r \sin \theta}{1-r^2} \right).$$

2° Quand le point M se déplace suivant la direction MB, on a

$$r = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)},$$

$$U = \frac{2}{\pi} \arctan \left[\frac{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \theta) \sin \theta}{\sin^2(\alpha + \theta) - \sin^2 \alpha} \right].$$

Si l'on fait tendre θ vers zéro, l'argument a pour limite $\tan \alpha$, donc

$$U_B = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

On obtient 0 et 1 si l'on tend vers B en suivant le diamètre OB et la circonférence CB. (Octobre 1919.)