

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 188-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__188_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. Fontené. — Mannheim a montré (*Comptes rendus*, 1897, 2^e volume, p. 849) que, si les mêmes droites sont à la fois les normales principales d'une courbe gauche (A) et les binormales d'une autre courbe gauche (B), on a pour la courbe (A)

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{1}{AR^2};$$

si MC est le rayon de courbure en M, si MC' est le rayon de torsion porté sur la binormale, en traçant CC' et en menant MH perpendiculaire à CC', la projection de MH sur MC a une longueur constante A.

Il y aurait lieu de donner également l'équation intrinsèque vérifiée par les courbes (B).

NOTE. — Il est aisé de répondre à la question posée par M. Fontené, en employant le calcul vectoriel.

Soit MBTN le trièdre principal d'une courbe C, en un point M; soit P un point de la binormale MB, décrivant une courbe dont cette binormale est la normale principale. La longueur MP est évidemment une constante α .

En employant les notations de MM. Burali-Forti et Marcolongo ⁽¹⁾, on doit avoir

$$\frac{dP}{ds} \times \frac{d^2 P}{ds^2} \wedge \mathbf{b} = 0.$$

⁽¹⁾ *Elements de calcul vectoriel*, traduction LATTÈS, p. 86.

Or on a

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} + a \mathbf{b},$$

d'où en dérivant et en appliquant les formules de Frenet,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{ds} &= \frac{d\mathbf{M}}{ds} + a \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{t} + a \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{T}}, \\ \frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{a}{\mathbf{T}} \frac{d\mathbf{n}}{ds} - \frac{a\mathbf{T}'}{\mathbf{T}^2} \mathbf{n} \\ &= \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{R}} - \frac{a}{\mathbf{T}} \left(\frac{1}{\mathbf{R}} \mathbf{t} + \frac{1}{\mathbf{T}} \mathbf{b} \right) - \frac{a\mathbf{T}'}{\mathbf{T}^2} \mathbf{n} \\ &= \frac{-a}{\mathbf{RT}} \mathbf{t} + \left(\frac{1}{\mathbf{R}} - \frac{a\mathbf{T}'}{\mathbf{T}^2} \right) \mathbf{n} - \frac{a}{\mathbf{T}^2} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2} \wedge \mathbf{b} &= \frac{a}{\mathbf{RT}} \mathbf{n} + \left(\frac{1}{\mathbf{R}} - \frac{a\mathbf{T}'}{\mathbf{T}^2} \right) \mathbf{t}, \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2} \wedge \mathbf{b} &= \frac{1}{\mathbf{R}} - \frac{a\mathbf{T}'}{\mathbf{T}^2} + \frac{a^2}{\mathbf{RT}^2}. \end{aligned}$$

La relation cherchée entre les éléments de la courbe C est donc

$$\frac{1}{\mathbf{R}} - \frac{a\mathbf{T}'}{\mathbf{T}^2} + \frac{a^2}{\mathbf{RT}^2} = 0.$$

Il va sans dire que la relation de Mannheim s'obtient aussi facilement par l'emploi de la méthode vectorielle.

R. B.