

T. LEMOYNE

Lieux des foyers ordinaires des courbes algébriques d'un faisceau tangentiel ou ponctuel

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20 (1920), p. 14-17

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__14_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M'3g]

LIEUX DES FOYERS ORDINAIRES DES COURBES ALGÈBRIQUES
D'UN FAISCEAU TANGENTIEL OU PONCTUEL ;

PAR M. T. LEMOYNE.

Considérons les courbes (C) , de classe n , appartenant à un système de caractéristiques (μ, ν) , c'est-à-dire telles qu'il y a μ courbes analogues passant par un point quelconque et ν autres courbes analogues touchant une droite quelconque. Cherchons le lieu du point d'intersection des tangentes qu'on peut mener aux courbes (C) par deux points fixes P et Q .

L'ordre de ce lieu est égal au nombre des points du lieu situés sur une droite quelconque, par exemple sur une droite Δ passant en P . Supposons que les courbes (C) n'admettent pas PQ pour tangente commune et ne passent par aucun point fixe de cette droite.

Il y a ν courbes (C) tangentes à la droite PQ et ν seulement. Pour chacune de ces ν courbes, le point P est $(n - 1)$ fois point de rencontre de la tangente QP

et des $(n - 1)$ tangentes autres que PQ que l'on peut mener de P à cette courbe, par conséquent le lieu passe $\nu(n - 1)$ fois en P; autrement dit, le point P est point multiple d'ordre $\nu(n - 1)$ du lieu. Il en est évidemment de même du point Q.

D'autre part, il y a ν courbes (C) tangentes à la droite $P\Delta$; les $n\nu$ tangentes qu'on peut leur mener du point Q rencontrent encore $P\Delta$ en $n\nu$ points du lieu, et il n'y en a pas d'autres sur $P\Delta$.

On en conclut que le lieu cherché est une courbe d'ordre $\nu(2n - 1)$, qui admet P et Q pour points multiples d'ordre $\nu(n - 1)$ et coupe d'ailleurs encore la droite PQ aux ν points où elle est touchée par les ν courbes (C) qui lui sont tangentes.

Nous pouvons donc dire que :

1. *Si de deux points fixes P, Q on mène les tangentes aux courbes de classe n qui appartiennent à un système de caractéristiques (μ, ν) et qui, de plus, n'admettent pas PQ pour tangente commune et ne passent par aucun point fixe de cette droite, le lieu des points d'intersection de ces tangentes est une courbe d'ordre $\nu(2n - 1)$ admettant les points P et Q pour points multiples d'ordre $\nu(n - 1)$.*

Prenons pour points P et Q les points cycliques du plan, les points d'intersection des tangentes sont foyers ordinaires des courbes (C), donc :

2. *Le lieu des foyers des courbes de classe n appartenant à un système de caractéristiques (μ, ν) , ne touchant pas toutes la droite de l'infini et n'ayant pas leurs directions asymptotiques données, est une courbe d'ordre $\nu(2n - 1)$ admettant les points cycliques pour points multiples d'ordre $\nu(n - 1)$.*

Lorsque $\nu = 1$, les courbes (C) appartiennent à un faisceau tangentiel. Par suite :

3. *Le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes de classe n , non tangentes à la droite de l'infini, est une courbe d'ordre $2n - 1$ qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre $n - 1$.*

En particulier :

Le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques à centre est une cubique circulaire.

Supposons maintenant que les courbes (C) appartenant à un système (μ, ν) soient les courbes d'ordre m d'un faisceau ponctuel. On sait que dans un faisceau ponctuel de courbes d'ordre m , il y a $2(m - 1)$ courbes tangentes à une droite quelconque ; on a donc $\nu = 2(m - 1)$ et, comme la classe n des courbes (C) est égale à $m(m - 1)$, on en conclut que le lieu des foyers de ces courbes est d'ordre

$$\nu(2n - 1) = 2(m - 1)[2m(m - 1) - 1].$$

Ainsi :

4. *Le lieu des foyers des courbes d'ordre m appartenant à un faisceau ponctuel et n'ayant aucune direction asymptotique donnée est une courbe d'ordre $2(m - 1)[2m(m - 1) - 1]$ qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre $2(m - 1)[m(m - 1) - 1]$.*

En particulier :

Le lieu des foyers des coniques d'un faisceau ponctuel, n'ayant aucune direction asymptotique donnée, est une sextique bicirculaire.

Si dans le théorème 2 on fait $n = 2$, on obtient le théorème suivant, dû à Chasles (1) :

Le lieu des foyers des coniques d'un système (μ, ν) qui ne touchent pas la droite de l'infini et n'ont pas leurs directions asymptotiques données est une courbe d'ordre 3ν admettant les points cycliques pour points multiples d'ordre ν .