

MAURICE D'OCAGNE

Sur l'hélicoïde gauche

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 81-89

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__81_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[Mⁿ]

SUR L'HÉLICOÏDE GAUCHE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 310), la théorie de l'hélicoïde gauche a été prise pour l'un des exemples d'application de la méthode de Mannheim, fondée sur l'emploi des principes de la Géométrie cinématique.

Nous avons précédemment fait voir (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1895, p. 114) comment un procédé plus strictement géométrique permet d'étudier les surfaces gauches à cône directeur de révolution les plus générales, dont l'hélicoïde gauche ordinaire (à noyau cylindrique de révolution) n'est qu'un cas particulier. Toutefois, les simplifications qui apparaissent quand on se borne à ce cas méritent d'être mises en évidence. C'est ce qui va être fait dans la présente Note où se rencontreront d'ailleurs quelques remarques nouvelles.

2. Soit, en projection sur un plan de section droite (perpendiculaire à l'axe) de la surface, pris comme plan horizontal, un point m de la génératrice D .

Si z est la cote, par rapport à ce plan de section droite, du point p où la génératrice D touche le noyau cylindrique de la surface, et si φ est l'inclinaison de cette génératrice sur ce plan, on a

$$pm = z \cot \varphi,$$

fois le *pôle* de cette génératrice sur la projection considérée. Lorsqu'on fait varier la génératrice D , ce pôle décrit un cercle (n) de centre o , dit *cercle polaire*.

Les normales aux sections droites le long de D , toutes horizontales, rencontrant la génératrice D et la verticale du pôle n , engendrent donc un parabolôide hyperbolique que nous appellerons π_0 .

Quant aux normales à la surface le long de D , qui engendrent, comme on sait, également un parabolôide (que nous représenterons par π_1), comme elles se projettent suivant les droites mn , on voit qu'elles rencontrent les deux mêmes directrices.

3. Cherchons, sur D , le point u de la courbe d'ombre produit par des rayons parallèles à une direction donnée, inclinée à l'angle ψ sur l'horizon. Celui de ces rayons qui passe par p , ayant pour trace, sur le plan de section droite de m , le point r , tel que

$$pr = z \cot \psi,$$

mr est la direction de l'horizontale du plan tangent en u , et, par suite, ce point se trouve sur la perpendiculaire abaissée de n sur mr .

Appelons q le point où nu rencontre la perpendiculaire abaissée de o sur pr , droite fixe puisque la direction de pr l'est elle-même.

Le triangle onq , semblable au triangle pmr (côtés deux à deux perpendiculaires), donne

$$\frac{oq}{on} = \frac{pr}{pm} = \frac{\cot \psi}{\cot \varphi},$$

ou, d'après (1),

$$(2) \quad oq = h \cot \psi.$$

Le point q est donc un point fixe. On l'appelle, en projection, le *pôle de la courbe d'ombre*.

Lors donc qu'on fait varier la génératrice D on voit que la construction de la courbe d'ombre, point par point, est la suivante : on joint le pôle n de D , qui décrit le cercle polaire (n) , au pôle fixe q ; la droite nq coupe D au point u qui décrit la courbe d'ombre.

Déduisons de là la normale à la courbe d'ombre. Pour cela, nous appliquerons au triangle variable npu le procédé de Mannheim (*Cours de Géométrie pure et appliquée*, t. I, p. 126) en remarquant que les côtés np et un pivotent respectivement autour des points o et q , que le côté mp a pour enveloppe le cercle (p) , que les sommets n et p décrivent les cercles (n) et (p) de centre o . Si donc la normale cherchée à la courbe (u) coupe en v et w la normale op au cercle (p) et la perpendiculaire élevée à un au point q , qui elle-même rencontre en s le rayon op , on a

$$\frac{d(n)}{d(p)} = \frac{no}{po}, \quad \frac{d(p)}{d(u)} = \frac{po}{uv}, \quad \frac{d(u)}{d(n)} = \frac{uw}{ns},$$

d'où, par multiplication membre à membre,

$$\frac{no \cdot uw}{uv \cdot ns} = 1$$

ou

$$\frac{uw}{uv} = \frac{ns}{no}.$$

Mais, si l'on tire par u , à op , la parallèle $v'\omega'$ qui coupe oq en v' et qs en ω' , on a

$$\frac{ns}{no} = \frac{u\omega'}{uv'}.$$

Donc

$$\frac{u\omega'}{uv'} = \frac{uw}{uv},$$

ce qui montre que $v\omega'$ est parallèle à $v\omega'$, c'est-à-dire

perpendiculaire à nu . De là, la construction cherchée : prendre le point de rencontre v' de la droite fixe oq et de la perpendiculaire élevée en u à D ; mener de v' à n la perpendiculaire $v'v$ qui coupe on en v ; uv est la normale à la courbe d'ombre.

Si l'hélicoïde est à plan directeur (ici confondu avec le plan horizontal), le pôle q de la courbe d'ombre reste le même, mais celui n de la génératrice D va à l'infini sur op ; dès lors, le point u est le pied de la perpendiculaire abaissée de q sur D ; autrement dit, la projection (u) de la courbe d'ombre devient la podaire du cercle (p) par rapport au point q . Dans ce cas, le point v' se confond avec le point q et le point v avec le pied de la perpendiculaire abaissée de q sur op ; on retrouve bien ainsi la construction classique de la normale à la podaire.

4. Nous allons maintenant déterminer le centre de courbure c de la section droite répondant au point m . Pour cela, nous appliquerons le même procédé que ci-dessus au triangle npm . Les sommets de ce triangle décrivent respectivement le cercle (n), le cercle (p) et la section droite dont la normale est mn ; son côté np pivote autour du point o ; son côté pm reste tangent au cercle (p); l'inconnue est le point c où mn touche son enveloppe; on a

$$\frac{d(n)}{d(p)} = \frac{no}{po}, \quad \frac{d(p)}{d(m)} = \frac{po}{mn}, \quad \frac{d(m)}{d(n)} = \frac{mc}{nk},$$

si k est le point où on rencontre la normale à l'enveloppe de mn , c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en c à mn .

De là, si l'on multiplie membre à membre,

$$\frac{no.mc}{mn.nk} = 1$$

ou

$$\frac{nk}{no} = \frac{mc}{mn}.$$

Tirons la parallèle cl à no , qui coupe mo en l . Nous avons

$$\frac{mc}{mn} = \frac{cl}{no}.$$

Il résulte de là que $cl = nk$, et, par suite, que lk est parallèle à nc . Si donc ml coupe ck en j , il vient

$$\frac{jm}{jl} = \frac{cm}{kl} = \frac{cm}{nc} = -\frac{cm}{cn}.$$

Élevons en n la perpendiculaire ng à mn ; cette droite étant parallèle à cj , de même que no l'est à cl , les triangles nog et clj sont homothétiques par rapport à m , et l'on a

$$\frac{gm}{go} = \frac{jm}{jl}$$

ou, d'après l'égalité précédente,

$$\frac{gm}{go} = -\frac{cm}{cn}.$$

Si donc la droite cg coupe no en i , le triangle mno coupé par la transversale cig donne

$$\frac{cm}{cn} \frac{in}{io} \frac{go}{gm} = 1,$$

ou, en vertu de la précédente égalité.

$$\frac{in}{io} = -1,$$

ce qui montre que le point i est le milieu de on .

La construction du centre de courbure c se réduit donc à ceci : prendre le point de rencontre g de om

et de la perpendiculaire élevée en n à mn ; la droite qui joint ce point g au milieu i de on passe par le centre de courbure c .

Si le noyau cylindrique de l'hélicoïde se réduit à son axe, autrement dit, si la génératrice D rencontre constamment cet axe, l'hélicoïde devient une surface de vis à filet triangulaire. Dans ce cas, l'angle *mon* étant droit, le point n est l'extrémité de la sous-normale polaire rapportée au pôle o . Le lieu de cette extrémité est donc alors le cercle (n), ce qui caractérise une spirale d'Archimède. Telle est, en effet, comme on sait, la section droite de la surface de vis à filet triangulaire. Voyons ce que devient alors la construction du centre de courbure c . Faisant la figure dans cette hypothèse, on voit que le triangle mng , rectangle en n , admet no pour hauteur. Le centre de courbure c se trouve alors sur la droite joignant le sommet g au milieu de i de la hauteur issue du sommet de l'angle droit; on sait que cette droite n'est autre que la symédiane issue de g dans le triangle mng ; on retrouve ainsi un résultat que nous avons obtenu jadis (*N. A.*, 1880, p. 292).

5. Étudions le lieu du centre de courbure c pour les points m distribués le long de D . Le point c est donné par la rencontre de deux droites issues de points alors fixes n et i , l'une joignant le point n au point m variable sur D , l'autre joignant le point i au point de rencontre g de mo et de la perpendiculaire élevée en n à mn .

Les deux faisceaux au moyen desquels on engendre ainsi la courbe (c) ne sont pas homographiques, attendu que, si à une droite nc ne correspond qu'une droite ic , en revanche, à une droite ic correspondent deux droites nc ; néanmoins cette courbe est une conique; on peut le voir comme suit : elle passe par

le point n , avec lequel le point c coïncide lorsque le point m est à l'infini sur D , et ce point est évidemment simple sur la courbe; or, ce que nous venons de dire montre que, sur chaque droite issue de n , il n'existe, en dehors de n , qu'un seul point c du lieu; ce lieu est donc bien une conique.

Il est facile d'en obtenir les directions asymptotiques. En effet, le point c s'éloigne à l'infini lorsque gi est parallèle à mn ; mais, en ce cas : 1° le point g est le milieu de om et, par suite, se trouve sur la parallèle δ à D , à mi-distance du point o ; 2° l'angle ign est droit et le point g se trouve sur le cercle γ décrit sur on comme diamètre. Les droites joignant le point n aux points communs à la droite δ et au cercle γ font connaître les directions asymptotiques cherchées.

Pour qu'elles soient réelles et, conséquemment, pour que la conique (c) (qui a, dans tous les cas, un axe dirigé suivant on) soit une hyperbole, il faut et il suffit que la droite δ rencontre en des points réels le cercle γ , ce qui a lieu si pn est inférieur à $\frac{po}{2}$.

Lorsque n se confond avec le milieu de po , la conique (c) est une parabole. Elle est une ellipse lorsque n est plus éloigné de p que le milieu de po .

Dans l'espace, le lieu des centres de courbure c est à l'intersection du cylindre vertical T ayant pour base la conique (c) sus-définie avec le parabolôïde que nous avons appelé π_0 au n° 2. Ce cylindre et ce parabolôïde ayant en commun la verticale du pôle n de la génératrice D , le reste de leur intersection est une cubique gauche; tel est donc le lieu cherché.

Remarquons que, si nous pratiquons dans la surface une section normale par la tangente en m à la section droite, section que, pour abrégé (nous pourrions

appeler une *section normale droite le long de D*), le théorème de Meusnier montre que le centre de courbure de cette section se projette également en c sur le plan horizontal. Le lieu de ce centre de courbure est donc à l'intersection du même cylindre Γ que ci-dessus et du paraboloïde des normales le long de D , désigné par π_1 au n° 2. Ces deux quadriques ayant encore en commun la verticale de n , on voit que *ce lieu est également constitué par une cubique gauche.*