

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 69-80

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__69_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1483.

(1883, p. 528 ; 1917, p. 233.)

Soient V le volume d'un tétraèdre et V_1 le volume du tétraèdre obtenu en menant par un point quelconque des

droites égales et parallèles aux plus courtes distances α , β , γ , des arêtes opposées du tétraèdre donné : on a

$$1) \text{VV}_1 = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2.$$

GENTY.

SOLUTION

Par M. R. BOUVIAIST.

Prenons comme origine O un sommet du tétraèdre donné, soient S_1, S_2, S_3 les trois autres sommets; posons

$$OS_1 = p, \quad OS_2 = q, \quad OS_3 = r,$$

les coordonnées de S_1, S_2, S_3 seront

$$S_1 \begin{cases} x = pa_1, \\ y = qb_1, \\ z = qc_1, \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} x = qa_2, \\ y = qb_2, \\ z = qc_2, \end{cases} \quad S_3 \begin{cases} x = ra_3, \\ y = rb_3, \\ z = rc_3, \end{cases}$$

et l'on a

$$V = \frac{1}{6} pqr \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} pqr \Delta$$

Si A_i, B_i, C_i désignent les mineurs de Δ correspondant à a_i, b_i, c_i , les coefficients angulaires de la perpendiculaire commune à OS_1 et S_2S_3 seront

$$\frac{qA_3 + rA_2}{\sigma_1}, \quad \frac{qA_1 - rA_3}{\sigma_1}, \quad \frac{qA_2 - rA_1}{\sigma_1},$$

$$\sigma_1 = [(qA_3 + rA_2)^2 + (qA_1 - rA_3)^2 + (qA_2 - rA_1)^2]^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$V_1 = \frac{1}{6} \frac{\alpha\beta\gamma}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \begin{vmatrix} qA_3 + rA_2 & qB_3 - rB_2 & qC_3 - rC_2 \\ pA_3 + rA_1 & pB_3 + rB_1 & pC_3 + rC_1 \\ pA_2 - qA_1 & pB_2 + qB_1 & pC_2 + qC_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \frac{\alpha\beta\gamma\Delta_1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

où

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & r\Delta & q\Delta \\ r\Delta & 0 & p\Delta \\ q\Delta & p\Delta & 0 \end{vmatrix} = 2pqr\Delta^3,$$

d'où

$$18V_1V = p^2q^2r^2\Delta^3 \frac{\alpha\beta\gamma}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

le plan mené par $S_2 S_3$ parallèle à OS_1 a pour équation

$$(x - qa_2)(qA_3 + rA_2) + (y - qb_2)(qB_3 + rB_2) + (z - qc_2)(qC_3 + rC_2) = 0,$$

z , distance de ce plan à l'origine, est égale à $\frac{qr\Delta}{\sigma_1}$, d'où

$$z_1^2 = \frac{p^2 q^2 r^2 \Delta^3}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3},$$

d'où enfin

$$18VV_1 = z^2 \beta^2 \gamma^2.$$

L'énoncé est donc partiellement inexact.

1502.

(1881, p. 400, 1917, p. 233.)

On donne dans l'espace deux droites A et B. Une hyperbole H doit avoir la droite A pour directrice et être un méridien d'une surface gauche de révolution contenant la droite B. On demande le lieu du foyer de H correspondant à la directrice A.

HALPHEN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ la surface gauche de révolution considérée; soit O son centre; B rencontre le cercle de gorge en α , le plan OA en γ ; soient P et P' les pieds sur A et B de la perpendiculaire commune à A et B, D l'intersection de A avec le plan du centre de gorge, β l'intersection de la parallèle à A menée par γ avec ce même plan.

Posons

$$PP' = d, \quad \beta O \alpha = \theta, \quad \widehat{\beta \alpha \gamma} = \varphi.$$

On a

$$\tan \varphi = \frac{c}{a}, \quad d = a - \frac{a^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$d = a(1 - \cos \varphi \cos \theta), \quad PD = a \sin \theta \sin \varphi.$$

Soit F le foyer de la méridienne située dans le plan OA et

correspondant à la directrice A,

$$DF = \alpha \cos \varphi \tan^2 \varphi.$$

Soient P'' la projection de P' sur le cercle de gorge, F' la projection de F sur la perpendiculaire en D à DP'',

$$DF' = DF \sin \theta;$$

d'où

$$\frac{PD}{DF'} = \frac{1}{\tan \varphi},$$

$$DF = \frac{d \cos \varphi \tan^2 \varphi}{1 - \cos \varphi \cos \theta}.$$

Ces deux relations montrent que le lieu cherché est la section par le plan π mené par PP' perpendiculaire à B, du cylindre parallèle à A ayant pour directrice l'ellipse (E) située dans le plan mené par PP' perpendiculaire à A, et ayant pour foyer P, pour centre P', pour demi-axe focal $\frac{d}{\cos \varphi}$, pour demi-axe non focal, $d \tan \varphi$.

Il en résulte immédiatement que π est un plan cyclique du cylindre et que le lieu cherché est le *cercle de centre P' de rayon $\frac{d}{\cos \varphi}$, situé dans le plan π* .

Autre solution par M. FACHEUX.

1508.

1881, p. 128 1917, p. 213

On sait que les cordes d'une conique qui sont vues d'un point C de la courbe sous un angle droit passent par un point fixe P: la polaire de ce point, par rapport à la conique, est une corde commune à cette courbe et au point C considéré comme un cercle infiniment petit.

Cela posé, soient A et B deux points quelconques de cette polaire. Par les trois points A, B, C, on peut faire passer trois coniques ayant un contact du second ordre avec la conique donnée aux points L, M, N, respectivement. Les droites CL, CM, CN sont normales aux côtés d'un triangle équilatéral, et il en est de même des droites qui joignent C

aux quatrièmes points de rencontre des trois coniques osculatrices deux à deux.

GENTY.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Si après avoir fait correspondre aux points A et B les points cycliques dans une transformation homographique, nous prenons l'inverse de la conique transformée par rapport au point C, la proposition à démontrer devient la suivante :

Si l'on joint le point double C d'une cubique nodale aux trois points d'inflexion I_1, I_2, I_3 de cette cubique, les rapports anharmoniques des faisceaux formés par les tangentes au point double et les droites $CI_1CI_2, CI_2CI_3, CI_3CI_1$ sont égaux aux racines cubiques imaginaires de l'unité. Il en est de même pour les faisceaux formés par les tangentes au point double et les droites $CT_1CT_2, CT_2CT_3, CT_3CT_1$; T_1, T_2, T_3 étant les sommets du triangle formé par les tangentes d'inflexion.

Soit en effet $(x + y + z)^3 - 17xyz = 0$ l'équation canonique de la cubique, les côtés du triangle de référence sont les tangentes d'inflexion, la droite $x + y + z = 0$ joint les points d'inflexion, le point $x = y = z$ est le point double, les tangentes en ce point sont

$$\begin{aligned} x - t y + t^2 z &= 0 \\ x + t^2 y - t z &= 0 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad t^2 - t + 1 = 0.$$

Les rapports anharmoniques $(I_1 I_2), (I_2 I_3), (I_3 I_1)$ sont $\frac{t-2}{1-2t}$, $\frac{t-2}{t(1-2t)}$, t ; les rapports anharmoniques $(T_1 T_2), (T_2 T_3), (T_3 T_1)$ sont $-\frac{1}{t}$, t^2 , $-\frac{1}{t}$, valeurs qui, d'après la relation $t^2 - t + 1 = 0$, satisfont à l'énoncé.

1528.

(1885, p. 131, 1917, p. 235.)

Soient PA, PB, PC les trois normales menées d'un point P à une parabole donnée; on considère les centres

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XIX. (Février 1919.)

O, O', O'', O''' des quatre cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

1° Si le point P est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points O, O', O'', O'''. Les trois autres sont sur la parabole lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole donnée.

2° Par les points O, O', O'', O''' on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours Q₁, Q₂, Q₃ sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes. Pour quelles positions du point P les trois hyperboles sont-elles réelles? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole. Si le point Q correspondant est sur la parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point P.

3° En général, quel est le lieu du point P tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point? Quel est le lieu du point de concours Q, du centre de l'hyperbole, des points O, O', O'', O'''?

4° Quel est le lieu des points Q₁, Q₂, Q₃ si le point P décrit une droite donnée.

J. HADAMARD.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient $y^2 - 2px = 0$ la parabole donnée; x_0, y_0 le point P, nous aurons

$$BC \equiv x t_1 \sqrt{2p} + t_1^2 y + p y_0 = 0, \quad A(x = t_1^2, y = t_1 \sqrt{2p}),$$

$$CA \equiv x t_2 \sqrt{2p} + t_2^2 y + p y_0 = 0, \quad B(x = t_2^2, y = t_2 \sqrt{2p}),$$

$$AB \equiv x t_3 \sqrt{2p} + t_3^2 y + p y_0 = 0, \quad C(x = t_3^2, y = t_3 \sqrt{2p}),$$

t_1, t_2, t_3 étant racines de l'équation

$$t^3 \sqrt{2p} - t \sqrt{2p} (x_0 - p) - p y_0 = 0.$$

Le triangle ABC est conjugué aux deux hyperboles équila-

tères

$$(H_1) = 2xy + py_0 = 0,$$

$$(H_2) = x^2 - y^2 - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 = 0;$$

les points d'intersection de ces deux courbes sont les points O, O', O'', O'''.

1° Si $x_0 = -\frac{p}{2}$, on a

$$H_1 \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right)y_0 + x(y - y_0) = 0,$$

$$H_2 \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{3p}{2}\right) - y(y - y_0) = 0,$$

et les points d'intersection de H_1 et H_2 autres que P sont sur la parabole

$$\pi \equiv x^2 - \frac{3p}{2}x - yy_0 = 0$$

ou encore sur la parabole

$$\pi' \equiv \pi - H_2 = y^2 - \frac{px}{2} + \frac{3p^2}{4} = 0,$$

lieu des sommets des angles droits normaux à $y^2 - 2px = 0$.

2° Soient α, β les coordonnées de Q_1 , l'hyperbole d'Apollonius de ce point par rapport à l'hyperbole $\lambda H_1 + H_2 = 0$ doit faire partie du faisceau linéaire déterminé par H_1 et H_2 , d'où les relations

$$(I) \quad \begin{cases} -\lambda\alpha + \beta + \lambda(p + x_0) + \frac{y_0}{2} = 0, \\ \alpha + \lambda\beta + (p + x_0) - \lambda y_0 = 0, \\ \frac{\alpha y_0}{2} + \beta(p + x_0) - py_0 + \lambda(x_0^2 - p^2) = 0; \end{cases}$$

d'où, par élimination de α et β ,

$$(2) \quad \lambda^3(x_0^2 - p^2) + \lambda^2(2x_0y_0 + py_0) + \lambda\left[\frac{3y_0^2}{4} - 2(x_0 + p)(x_0 + 2p)\right] - (x_0y_0 + 2py_0) = 0,$$

équation qui déterminera les trois hyperboles répondant à la question.

Soit ω le centre du cercle ABC, ses coordonnées sont

$$x_{\omega} = \frac{p + x_0}{2},$$

$$y_{\omega} = \frac{y_0}{4}.$$

Des deux premières relations (1) on déduit par élimination de λ

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_{\omega} - 2\beta y_{\omega} - 8(x_{\omega}^2 + y_{\omega}^2) = 0,$$

équation d'un cercle concentrique au cercle ABC et de rayon triple.

Le centre de l'hyperbole $\lambda H_1 + H_2$ est à l'intersection des droites :

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= 2x_{\omega}, \\ -\lambda x + y &= 2y_{\omega}, \end{aligned}$$

ou, en transportant l'origine en ω ,

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= x_{\omega} - \lambda y_{\omega}, \\ -\lambda x + y &= y_{\omega} + \lambda x_{\omega}; \end{aligned}$$

dans les mêmes conditions les deux premières relations (1) qui déterminent α, β s'écrivent

$$\begin{aligned} -\lambda x + \beta + 3(\lambda x_{\omega} + y_{\omega}) &= 0, \\ \alpha + \lambda\beta + 3(x_{\omega} - \lambda y_{\omega}) &= 0; \end{aligned}$$

la droite ωQ_1 passe donc par le centre de $\lambda H_1 + H_2 = 0$ et l'on a en désignant par x_c, y_c les coordonnées de ce point

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(p + x_0) - 3x_c, \\ \beta &= y_0 - 3y_c. \end{aligned}$$

L'équation (2) peut s'écrire

$$\left| \lambda(x_0 + p) + \frac{y_0}{2} \right| \left| \lambda^2(x_0 - p) + 3\lambda \frac{y_0}{2} - 2(x_0 + 2p) \right| = 0.$$

Les trois hyperboles

$$\lambda_i H_1 + H_2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

seront réelles si l'on a

$$9y_0^2 + 32(x_0 + 2p)(x_0 - p) > 0;$$

à la racine $\lambda = -\frac{y_0}{2(x_0 + p)}$ correspond une hyperbole ayant pour centre

$$x_c = p + x_0,$$

$$y_c = 0;$$

le point Q correspondant a pour coordonnées

$$x = -(p + x_0),$$

$$y = y_0.$$

L'hyperbole considérée passera par le point P, si l'on a

$$(p + 2x_0)[y_0^2 + 2p(x_0 + p)] = 0,$$

c'est-à-dire P étant quelconque si le point Q est sur

$$y^2 - 2px = 0.$$

3° D'une façon générale, l'hyperbole

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 + \lambda py_0 = 0$$

passera par P, si l'on a

$$(2x_0 + p)(\lambda y_0 - p) = 0,$$

c'est-à-dire si le point P est de

$$1) \begin{cases} y^2 - 2px = 0 & \text{sur la directrice,} \\ y^2 + 2p(x + p) = 0 & \text{sur la parabole,} \\ y^2(4x - 5p) - 2p^2(x - p) = 0 & \text{sur la cubique.} \end{cases}$$

2. Lieu du point de concours Q et lieu des centres des hyperboles. — Nous avons d'une façon générale

$$(Q) \begin{cases} x_\alpha = 2(p + x_0) - 3x_c & \text{et} & x_c = \frac{(p + x_0) - \lambda \frac{y_0}{2}}{1 + \lambda^2}, \\ y_\beta = y_0 - 3y_c & \text{et} & y_c = \frac{(p + x_0)\lambda + \frac{y_0}{2}}{1 + \lambda^2}. \end{cases}$$

Les relations (1) permettant d'exprimer $p + x_0$ et y_0 en fonction d'un même paramètre et l'équation (2) donnant λ en fonction de ce même paramètre, on obtiendra sans difficulté les équations paramétriques des divers lieux; ces calculs ne présentant aucun intérêt particulier, nous ne les effectuerons pas.

β. *Lieu des points* O, O', O'', O'''. — Ces quatre points sont à l'intersection des hyperboles

$$\begin{aligned} 2xy + py_0 &= 0, \\ x^2 - y^2 - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si P décrit la directrice de $y^2 - 2px = 0$, nous savons que les lieux cherchés se composent de la directrice et de la parabole lieu des sommets des angles droits normaux à

$$y^2 - 2px = 0.$$

Si P décrit la parabole $y^2 + 2p(x + p) = 0$, nous poserons

$$\begin{aligned} y_0 &= t\sqrt{2p}, \\ x_0 + p &= -t^2, \end{aligned}$$

et nous éliminerons t entre les deux équations :

$$\begin{aligned} 2xy + p\sqrt{2p}t &= 0, \\ x^2 - y^2 + t\sqrt{2p}y + 2t^2(p + x) + t^4 &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$4x^4y^4 + 4x^2y^2(x + p)p^3 - 2xy^2p^5 + p^6(x^2 - y^2) = 0.$$

Si P décrit la cubique, nous poserons

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{5pt^2 - 2p^3}{2(2t^2 - p^2)}, \\ y_0 &= t^2, \end{aligned}$$

et l'équation du lieu s'obtiendra comme précédemment.

4° Si le point P décrit une droite donnée, nous aurons,

comme plus haut, pour les coordonnées de Q_1, Q_2, Q_3 ,

$$x = \frac{\lambda(p + x_0)(2\lambda^2 - 1) + 3\lambda y_0}{2(\lambda^2 + 1)},$$

$$y = \frac{y_0(2\lambda^2 - 1) - 6(p + x_0)}{2(\lambda^2 + 1)},$$

λ étant déterminé par l'équation (2) et x_0, y_0 exprimés linéairement en fonction d'un paramètre.

2342.

(1917, p. 80.)

Soient C une courbe gauche et C_1 la courbe qui est le lieu des centres des sphères osculatrices à C. Si l'on désigne par R le rayon de courbure en un point M de C, par ρ le rayon MM_1 de la sphère osculatrice au même point, par R_1 le rayon de courbure de C_1 au point M_1 ; on a, lorsque R n'est pas constant,

$$(a) \quad R_1 = \left(\rho \frac{d\rho}{dR} \right).$$

Si R est constant, on a

$$(b) \quad R_1 = \rho = R.$$

R. BRICARD.

SOLUTION

Par M. G. FONTENÉ.

Étant donnée une courbe gauche C, la courbe qui admet comme plans osculateurs les plans normaux a pour tangentes les axes des cercles osculateurs et pour points les centres des sphères osculatrices. Si O est le centre du cercle osculateur en M, on a immédiatement

$$(1) \quad OM_1 = \frac{dR}{\eta},$$

η étant l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, et dR étant mis pour $|dR|$. On déduit d'abord de là la for-

mule connue

$$(1') \quad OM_1 = T \frac{dR}{ds},$$

T étant le rayon de torsion. Mais on en déduit aussi bien

$$(1'') \quad OM_1 = R_1 \frac{dR}{ds_1},$$

puisque η est en même temps l'angle de contingence de la courbe C_1 . Si M' et M'_1 sont sur les courbes C et C_1 deux points correspondants infiniment voisins des points M et M_1 , et si l'on mène M'_1P perpendiculaire à MM_1 , comme M'_1M' est égal à M'_1M en négligeant un infiniment petit du second ordre, on a

$$\frac{OM_1}{\rho} = \frac{d\rho}{ds_1}, \quad OM_1 = \frac{\rho d\rho}{ds_1};$$

on a donc bien

$$R_1 dR = \rho d\rho, \quad R_1 = \frac{\rho d\rho}{dR}.$$

Si R est constant, OM_1 est nul. La courbe C_1 est lieu des centres de courbure pour C . Il est bien connu que, inversement, la courbe C est lieu des centres de courbure pour C_1 . On a bien $R_1 = \rho = R$.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, M. FAUCHEUX, R. GOORMAGHTIGH, J. ROSE, L. MALOUE et *Un Abonné*.

