

MATHIEU WEILL

Sur des séries remarquables

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 54-58

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__54_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B2b]

SUR DES SÉRIES REMARQUABLES;

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. En intégrant par parties, on a, m étant entier et

(¹) La deuxième partie de ce théorème a été indiquée par Cesàro; voir *Natürliche Geometrie*, p. 80, où cette propriété est démontrée analytiquement.

positif,

$$\int x^m e^x dx = e^x [x^m - m x^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \dots].$$

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} C + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{1.2.(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{1.2.3.(m+4)} + \dots \\ = \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \right] \\ \times [x^m - m x^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \dots]. \end{aligned}$$

Égalons les coefficients des mêmes puissances de x , nous aurons

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots, \\ \frac{1}{m+1} &= 1 - \frac{m}{1.2} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} - \dots, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(p-1)!(m+p)} &= \frac{1}{p!} - \frac{m}{(p+1)!} + \frac{m(m-1)}{(p+2)!} - \dots \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{p}{m+p} &= 1 - \frac{m}{p+1} + \frac{m(m-1)}{(p+1)(p+2)} \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots, \end{aligned}$$

en supposant m et p des entiers positifs, et p différent de zéro.

Mais, si l'on suppose m et p quelconques, en exceptant les valeurs $p=0$ et $m=-1$, et si la série du second membre est convergente, elle aura pour somme $\frac{p}{m+p}$. Or, la condition de convergence est

$$m+p > 0.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *m et p étant des nombres quel-*

conques, en exceptant les valeurs $p=0$, $m=-1$,
si l'on a

$$m+p > 0,$$

la série convergente

$$1 - \frac{m}{p+1} + \frac{m(m-1)}{(p+1)(p+2)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots$$

a pour somme $\frac{p}{m+p}$.

Faisons $m = p\alpha$, il vient

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \frac{p\alpha}{p+1} + \frac{p\alpha(p\alpha-1)}{(p+1)(p+2)} - \dots,$$

d'où

$$1 = \left[1 - \frac{p\alpha}{p+1} + \frac{p\alpha(p\alpha-1)}{(p+1)(p+2)} - \dots \right] (1-\alpha).$$

En faisant $p=1$, on retombe sur un résultat obtenu au commencement, où α est remplacé par m , et si, en outre, nous prenons pour α un entier positif, nous aurons une égalité numérique.

Dans la série générale, faisons $m=p$, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = 1 - \frac{p+1}{p} + \frac{p(p-1)}{(p+1)(p+2)} \\ - \frac{p(p-1)(p-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots, \end{aligned}$$

développement valable pour $p > 0$.

Dans l'égalité

$$1 - \alpha + \alpha^2 - \dots = 1 - \frac{p\alpha}{p+1} + \dots,$$

égalons les coefficients de α dans les deux membres, nous aurons une égalité valable si le coefficient de α , dans le second membre, est une série convergente, ce

qui a lieu pour $p > 0$; on en déduit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1.2}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots,$$

d'où

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)(p+3)} + \frac{2.3}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \dots,$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+3} + \frac{3}{(p+3)(p+4)} + \frac{3.4}{(p+3)(p+4)(p+5)} + \dots,$$

et ainsi de suite.

II. Considérons une suite de quantités quelconques $a_1 a_2 \dots a_n$ rangées dans l'ordre indiqué par les indices.

Posons

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{a_n + a_1}{2},$$

$$c_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad c_2 = \frac{b_2 + b_3}{2}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{b_n + b_1}{2},$$

et ainsi de suite, puis

$$u_1 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_n - a_1)^2,$$

$$u_2 = (b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + \dots + (b_n - b_1)^2,$$

$$u_3 = (c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + \dots + (c_n - c_1)^2,$$

et ainsi de suite.

La série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ est convergente et a pour somme $\frac{1}{n} \sum (a_i - a_j)^2$.

Pour démontrer ce théorème, que j'ai énoncé et démontré dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires* de M. Niewen-głowski (15 janvier 1903), je considère un système de n points, les milieux des segments obtenus en joignant ces points, deux à deux, dans un ordre déterminé, puis

les milieux des côtés du nouveau polygone ainsi formé, et ainsi de suite; le point-limite est le centre des moyennes distances des n points donnés; on envisage ensuite les carrés des distances d'un point du plan aux systèmes successifs des points obtenus; on arrive ainsi très simplement au résultat énoncé, en supposant les points en ligne droite.

Cette série est remarquable à deux points de vue :

- 1° Elle échappe aux règles de convergence connues;
- 2° La somme reste la même lorsqu'on écrit les quantités $a_1 a_2 \dots a_n$ dans un ordre quelconque.

On peut facilement généraliser le théorème précédent en considérant, par exemple, les quantités

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad b_2 = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}, \quad \dots,$$

$$c_1 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}, \quad c_2 = \frac{b_2 + b_3 + b_4}{3}, \quad \dots$$