NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CL. SERVAIS

Sur les surfaces tétraédrales symétriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 456-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__456_1>

[O'6s]

SUR LES SURFACES TÉTRAÉDRALES SYMÉTRIQUES;

Par M. Cl. SERVAIS.
Professeur à l'Université de Gand.

---

1. On désigne par $A_1 B_1 C_1 D_1$ le tétraèdre de référence de la surface tétraédrale symétrique

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Du^m = 0,$$

par M, μ un point de la surface et le plan tangent correspondant. Les tangentes asymptotiques m, m_1 au point M sont des génératrices de la quadrique polaire de M; cette quadrique (Q) est conjuguée au tétraèdre $A_1 B_1 C_1 D_1$ et deux tangentes conjuguées appartiennent à un même complexe tétraédral dont $A_1 B_1 C_1 D_1$ est le tétraèdre fondamental. Les couples de tangentes conjuguées au point M forment une involution ayant pour éléments doubles les droites m, m_1. Le cône (M) du complexe tétraédral, déterminé par le rayon m, est donc tangent au plan μ le long de m. Par suite, *les tangentes à une ligne asymptotique* (θ) *de la surface tétraédrale symétrique* Σ_m *appartiennent à un même complexe tétraédral* (¹).

2. On considère la cubique gauche (G) circonscrite au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ et tangente au point M à la courbe (θ). Les courbes (θ) et (G) ont même plan osculateur μ au point M. Si ρ et $\mathfrak{T}$, ρ_1 et $\mathfrak{T}_1$ sont les rayons de courbure et de torsion au point M des courbes (θ) et (G), on a (²)

$$4\frac{\rho_1}{\rho} - 3\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}} = 1. \tag{1}$$

La tangente m au point M de la cubique (G) rencontre les faces $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$ du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ aux points A, B. On désigne par α, β les plans mA_1, mB_1 : par a, b les traces des plans MA_1C_1, MB_1C_1 sur le plan osculateur μ. On a (³)

$$\rho_1 = -\frac{1}{2}\frac{MA.MB}{AB}\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{T}_1 = -\frac{1}{3}\frac{MA.MB}{AB}\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}. \tag{3}$$

3. Les plans $\alpha \equiv mA_1$, $\beta \equiv mB_1$ sont tangents à la quadrique (Q) aux points A, B de la génératrice m. Si R'_1, R' désignent les rayons de courbure principaux

(¹) Sophus Lie, *Ueber Complexe mit An Anwendung auf die Theorie partieller Differentiel-Gleichungen* (*Math. Ann.*, t. V).

(²) A. Demoulin, *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe* (*Comptes rendus*, Paris, 17 mai 1897).

(³) C. Servais, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. I, 1906, in-8°).

au point M de la quadrique (Q), on a ([1])

$$(4) \qquad R'_1 R'_2 = -\frac{\overline{MA}^2 . \overline{MB}^2}{\overline{AB}^2} \; \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\mu\alpha).\sin^2(\mu\beta)}.$$

D'ailleurs, si R_1, R_2 désignent les rayons de courbure principaux de surface tétraédrale au point M, on a

$$(5) \qquad (m-1)^2 R_1 R_2 = R'_1 R'_2,$$

$$(6) \qquad \mathfrak{T} = \sqrt{-R_1 R_2}.$$

Des égalités (3), (4), (5), (6) on déduit

$$(7) \qquad \mathfrak{T} = \pm \frac{3}{m-1} \mathfrak{T}_1.$$

4. Dans le cas de la surface tétraédrale du troisième ordre,

$$A x^{-1} + B y^{-1} + C z^{-1} + D u^{-1} = 0,$$

la cubique gauche (G) appartient à la surface.

On a donc (Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 398) :

$$(8) \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} - 3 = -2 \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Les équations (1) et (8) ont pour systèmes de solutions

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = 1, \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = 1.$$

5. La relation (7) montre que pour une ligne asymptotique (θ) de la surface tétraédrale du troisième ordre la valeur du rapport $\mathfrak{T} : \mathfrak{T}_1$ est égale à $\frac{3}{2}$, Pour la sur-

---

([1]) C. Servais, *Sur la courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1898, in-8°).

face Σ_m, on a donc

$$(9) \qquad \mathfrak{T} = \frac{3}{1-m}\mathfrak{T}_1.$$

Des égalités (1) et (9) on déduit

$$(10) \qquad \rho = \frac{4}{2-m}\rho_1.$$

Ainsi : *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la ligne asymptotique* (θ) *d'une surface tétraédrale symétrique* Σ_m, *on considère la cubique gauche* (G) *tangente en* M *à la courbe* (θ) *et circonscrite au tétraèdre relatif à cette surface.*

1° *Le rapport des rayons de courbure* ρ *et* ρ_1 *des courbes* (θ) *et* (G) *au point* M *est en grandeur et en signe égal à*

$$\frac{4}{2-m}.$$

2° *Le rapport des rayons de torsion* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$ *des courbes* (θ) *et* (G) *au point* M *est en grandeur et en signe égal à*

$$\frac{3}{1-m}.$$

6. Des formules (2), (3), (9), (10) on déduit

$$\rho = \frac{2}{m-2}\,\frac{\text{MA.MB}}{\text{AB}}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{m-1}\,\frac{\text{MA.MB}}{\text{AB}}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)},$$

formules qui déterminent les rayons de courbure et de torsion de la ligne asymptotique (θ) de la surface tétraédrale Σ_m en fonction d'éléments déterminés par le point M, la tangente m et le tétraèdre de symétrie.

7. *Une tangente asymptotique* m *au point* M *de*

la surface tétraédrale Σ_m *rencontre les faces du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *aux points* A, B, C, D. *L'homologue du point* M *dans l'involution* (AB, CD) *est situé sur la droite joignant les traces des arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *sur le plan tangent en* M *à la surface.*

En effet, la conique (μ) du complexe (T) (1) située dans le plan μ est tangente en M à la droite m et inscrite dans le quadrilatère $abcd$ section du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ par le plan μ. Les tangentes a et b, c et d définissent sur la conique (μ) une involution (I); en désignant par m' la conjuguée de m dans cette involution, les trois points ab, cd, $K \equiv mm'$ sont collinéaires. L'involution (I) détermine sur la droite m l'involution (AB, CD, MK).

8. *Si* m *et* μ *sont respectivement une tangente asymptotique et le plan tangent en un point* M *d'une surface tétraédrale* Σ_m, *le conjugué du plan* μ *dans l'involution définie par les couples de plans projetant de* m *les sommets* A_1 *et* B_1, C_1 *et* D_1 *du tétraèdre de symétrie coupe les arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *en deux points alignés sur le point* M.

En effet le cône (M) du complexe (T) est tangent au plan μ le long de la droite m. Les génératrices MA_1 et MB_1, MC_1 et MD_1 définissent sur le cône (M) une involution (I) dont le rayon polaire r s'appuie sur les droites A_1B_1, C_1D_1; le plan mr est l'homologue de μ dans l'involution projetant de m l'involution (I).

9. La tangente au point $M(x_1 y_1 z_1 u_1)$ de la courbe tétraédrale symétrique (C_m)

$$A x^m + B y^m + C z^m + D u^m = 0.$$
$$A' x^m + B' y^m + C' z^m + D' u^m = 0$$

est l'axe du faisceau des plans tangents aux quadriques du faisceau

$$(A - kA')x_1^{m-2}x^2 + (B - kB')y_1^{m-2}y^2 + (C - kC')z_1^{m-2}z^2 + (D - kD')u_1^{m-2}u^2 = 0.$$

Cette droite m est une génératrice de la quadrique (Q_1) définie par une valeur k_1 convenablement choisie du paramètre k, et par suite m est une tangente asymptotique de la surface tétraédrale Σ_m représentée par l'équation

$$(A - k_1 A')x^m + (B - k_1 B')y^m + (C - k_1 C')z^m + (D - k_1 D')u^m = 0.$$

Le plan tangent en M à Σ_m est osculateur à la courbe (C_m) située sur Σ_m; sinon la courbure de cette courbe en un quelconque M de ses points serait nulle. Mais le plan est tangent au cône (M) du complexe tétraédral défini par le rayon m (1); donc :

Les tangentes à une courbe tétraédrale symétrique (C_m) appartiennent à un même complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental coïncide avec le tétraèdre de symétrie de la courbe (1).

La tangente m coupe la face $A_1B_1C_1$ du tétraèdre de symétrie $A_1B_1C_1D_1$ au point

$$x_2 = (BC')y_1^{m-1}z_1^{m-1}, \quad y_2 = (CA')x_1^{m-1}z_1^{m-1}, \quad z_2 = (AB')x_1^{m-1}y_1^{m-1}.$$

En exprimant que ce point appartient à la quadrique (Q_1), on détermine la valeur k_1 du paramètre k,

$$k_1 = \frac{A(BC')^2 y_1^m z_1^m + B(CA')^2 x_1^m z_1^m + C(AB')^2 x_1^m y_1^m}{A'(BC')^2 y_1^m z_1^m + B'(CA')^2 x_1^m z_1^m + C'(AB')^2 x_1^m y_1^m}.$$

---

(1) A. Demoulin, *Sur les courbes tétraédrales symétriques* (*Comptes rendus*, Paris, 1er avril 1892).

En désignant par Δ le dénominateur de k_1, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(A - k_1 A') &= -(AB')(AC')(AD')x_1^m u_1^m,\\
\Delta(B - k_1 B') &= -(BA')(BC')(BD')y_1^m u_1^m,\\
\Delta(C - k_1 C') &= -(CA')(CB')(CD')z_1^m u_1^m,\\
\Delta(D - k_1 D') &= -(DA')(DB')(DC')u_1^m u_1^m.
\end{aligned}$$

Il résulte de ces valeurs que les coordonnées du pôle du plan osculateur μ relativement à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0$$

sont données par les égalités

$$\begin{aligned}
X_1 &= (AB')(AC')(AD')x_1^{2m-1}, & Y_1 &= (BA')(BC')(BD')y_1^{2m-1},\\
Z_1 &= (CA')(CB')(CD')z_1^{2m-1}, & U_1 &= (DA')(DB')(DC')u_1^{2m-1}.
\end{aligned}$$

Par suite, les équations de la polaire réciproque $(C'_{m'})$ de la courbe (C_m) sont :

$$\begin{aligned}
A_1\, x^{m'} + B_1\, y^{m'} + C_1\, z^{m'} + D'\, u^{m'} &= 0,\\
A'_1\, x^{m'} + B'_1\, y^{m'} + C'_1\, z^{m'} + D'_1\, u^{m'} &= 0,
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
A_1 &= A : [(AB')(AC')(AD')]^{\frac{m}{2m-1}},\\
A'_1 &= A' : [(AB')(AC')(AD')]^{\frac{m}{2m-1}},\\
B_1 &= B : [(BA')(BC')(BD')]^{\frac{m}{2m-1}},\\
B'_1 &= B' : [(BA')(BC')(BD')]^{\frac{m}{2m-1}},\\
C_1 &= C : [(CA')(CB')(CD')]^{\frac{m}{2m-1}},\\
C'_1 &= C' : [(CA')(CB')(CD')]^{\frac{m}{2m-1}},\\
D_1 &= D : [(DA')(DB')(DC')]^{\frac{m}{2m-1}},\\
D'_1 &= D' : [(DA')(DB')(DC')]^{\frac{m}{2m-1}},
\end{aligned}$$

$$m' = \frac{m}{2m-1}.$$

Ainsi : *La polaire réciproque* (C'_m) *d'une courbe* *tétraédrale symétrique* (C_m) *est une courbe tétraédrale symétrique. Les exposants* m *et* m' *relatifs à ces deux courbes sont liés par la relation*

$$2mm' = m + m'.$$

10. Si l'on désigne par ρ_2 et $\mathfrak{T}_2$, ρ et $\mathfrak{T}$ les rayons de courbure et de torsion au point de contact M de la courbe tétraédrale (C_m) et d'une ligne asymptotique de la surface Σ_m(9), on a (Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 398)

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_2} - 3 = -2\frac{\rho_2}{\rho}. \tag{11}$$

Les égalités (9), (10), (11) donnent

$$\frac{3}{1-m}\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2} - 3 = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{2-m}{2}. \tag{12}$$

On a aussi (2)

$$4\frac{\rho_1}{\rho_2} - 3\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2} = 1. \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) ont pour systèmes de solutions

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2}{1-m}, \qquad \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} = \frac{3}{1-2m},$$
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{4}{2-m}, \qquad \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} = \frac{3}{1-m}.$$

Dans le cas de la cubique gauche :

$$Ax^{-1} + By^{-1} + Cz^{-1} + Du^{-1} = 0,$$
$$A'x^{-1} + B'y^{-1} + C'z^{-1} + D'u^{-1} = 0,$$

on a nécessairement $\rho_2 = \rho_1$, $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1$, donc dans le cas général on a

$$\rho_2 = \frac{2}{1-m}\rho_1, \qquad \mathfrak{T}_2 = \frac{3}{1-2m}\mathfrak{T}_1. \tag{14}$$

Ainsi : *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la courbe tétraédrale symétrique* (C_m), *on considère la cubique gauche* (G) *tangente en* M *à la courbe* (C_m) *et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie.*

1° *Le rapport des rayons de courbure* ρ_2 *et* ρ_1 *au point* M *de la courbe tétraédrale* (C_m) *et de la cubique* (G) *est égal à* [1]

$$\frac{2}{1-m}.$$

2° *Le rapport des rayons de torsion* ϖ_2 *et* ϖ_1 *au point* M *de la courbe* (C_m) *et de la cubique* (G) *est égal à* [2]

$$\frac{3}{1-2m}.$$

11. On déduit des équations (2), (3), (14) que :

Les rayons de courbure et de torsion au point M *d'une courbe tétraédrale symétrique sont donnés par les formules*

$$\rho = \frac{1}{m-1}\,\frac{\text{MA.MB}}{\text{AB}}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)},$$

$$\varpi = \frac{1}{2m-1}\,\frac{\text{MA.MB}}{\text{AB}}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)};$$

A, B *sont les traces de la tangente* m *au point* M *sur les faces* $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$ *du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *de la courbe tétraédrale;* a, b *les traces des plans* MA_1C_1, MB_1C_1 *sur le plan osculateur* μ; α, β *les plans* mA_1, mB_1.

(1) V. Jamet, *Sur les surfaces et les courbes tétraédrales symétriques* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1887).

(2) A. Demoulin, *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe* (*Comptes rendus*, Paris, 17 mai 1897).

12. *La tangente m au point* M *d'une courbe tétraédrale symétrique* (C) *rencontre les faces du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *aux points* A, B, C, D. *L'homologue du point* M *dans l'involution* (AB, CD) *est situé sur la droite joignant les traces des arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1, *sur le plan osculateur* μ *au point* M.

Le conjugué du plan osculateur μ *dans l'involution définie par les couples de plans projetant de la tangente m les couples de sommets* A_1 *et* B_1, C_1 *et* D_1 *du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *coupe les arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *en deux points alignés sur le point* M.

Les démonstrations sont identiques à celles des n^{os} 7 et 8.

La première propriété donne la construction du plan osculateur μ en un point donné M de la courbe tétraédrale symétrique (C).

13. *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la ligne asymptotique* (θ) *d'une surface tétraédrale symétrique* Σ_m *d'ordre m, on considère la courbe tétraédrale symétrique* (C) *tangente en ce point à la courbe* (θ), *ayant pour tétraèdre de symétrie celui de la surface* Σ_m *et pour exposant* $\frac{m}{2}$.

Les courbures et les torsions des deux courbes au point M *sont égales et de même signe.*

Car on a successivement pour les courbes (θ) et (C)

$$\rho = \frac{4}{2-m}\rho_1, \qquad \rho' = \frac{2}{1-\frac{m}{2}}\rho_1,$$

$$\mathfrak{T} = \frac{3}{1-m}\mathfrak{T}_1, \qquad \mathfrak{T}' = \frac{3}{1-2\frac{m}{2}}\mathfrak{T}_1,$$

ρ' et ϖ' étant les rayons de courbure et de torsion au point M de la courbe (C). On a donc

$$\rho = \rho', \qquad \varpi = \varpi'.$$

14. Les arêtes opposées A_1B_1, C_1D_1 du tétraèdre fondamental d'un complexe tétraédral (T) étant conjuguées dans un complexe linéaire (Δ), l'arête de rebroussement (C) d'une développable quelconque de la congruence [(T), (Δ)] jouit de la propriété suivante :

Un point M *étant pris arbitrairement sur la courbe* (C), *on considère la cubique gauche* (G) *tangente au point* M *à la courbe* (C) *et circonscrite au tétraèdre* $A_1B_1C_1D_1$.

Si ρ *et* ρ_1, ϖ *et* ϖ_1 *sont les rayons de courbure et de torsion des courbes* (C) *et* (G) *au point* M, *on a*

$$\rho = 2\rho_1, \qquad \varpi = 3\varpi_1,$$

en grandeur et en signe.

En effet, en utilisant les notations (2), les plans β et α sont respectivement les plans focaux des points A et B dans le complexe linéaire Δ. Les tangentes à la courbe (C) appartiennent à ce complexe. On a donc (¹)

$$(15) \qquad \varpi = -\frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}.$$

Les égalités (3) et (15) donnent

$$(16) \qquad \varpi = 3\varpi_1.$$

Les tangentes à la courbe (C) appartiennent au complexe tétraédral (T); l'égalité (1) qui lui est applicable, combinée avec l'égalité (16), conduit à la relation

$$\rho = 2\rho_1.$$

(¹) Cette formule est démontrée au n° 16.

Corollaire. — Le rayon de courbure de la courbe (C) au point M est donné par la formule

$$\rho = -\frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)}.$$

15. *La propriété* (10)

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{3}{1-2m}\,\mathfrak{C}_1,$$

due à M. A. Demoulin, *peut se déduire par la théorie des polaires réciproques de la propriété*

$$\rho_2 = \frac{2}{1-m}\,\rho_1,$$

due à M. V. Jamet.

Les polaires réciproques $(C'_{m'})$ et (G') des courbes (C_m) et (G) (10), relativement à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0,$$

sont tangentes au point M_1 correspondant de M. On désigne par ρ'_2 et ρ'_1 les rayons de courbure des courbes $(C'_{m'})$ et (G') au point M_1 ; on a (1)

$$(17) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho'_2}{\rho'_1}\,\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_1}.$$

La cubique (G') est osculatrice aux faces du tétraèdre de symétrie $A_1B_1C_1D_1$; si l'on désigne par ρ''_1 le rayon de courbure de la cubique tangente en M_1 à la cubique (G') et circonscrite à ce tétraèdre, on a

$$(18) \qquad \rho'_1 = 3\rho''_1,$$

et, d'après la propriété de M. Jamet,

$$(19) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2}{1-m}, \qquad \frac{\rho'_2}{\rho''_1} = \frac{2}{1-m'}.$$

(1) C. Servais, *Sur la courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocite*, p. 29.

On a d'ailleurs (9)

$$2mm' = m + m'. \tag{20}$$

Les égalités (17), (18), (19), (20) donnent

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{3}{1 - 2m} \mathfrak{T}_1.$$

Une remarque analogue est applicable aux propriétés (5) et (14).

16. Soient M, M' deux points infiniment voisins d'une courbe (C) dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire; A', B' deux points de la droite MM'; μ, μ' les plans osculateurs aux points M, M'; α', β' les plans focaux des points A', B'. On a

$$(\mathrm{MA'M'B'}) = (\mu\alpha'\mu'\beta'),$$

par suite

$$\lim \frac{\mathrm{MM'}}{\sin \mu\mu'} = \lim \frac{\mathrm{M'A'.MB'}}{\mathrm{A'B'}} \frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\mu'\alpha')\sin(\mu\beta')}$$

ou

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathrm{MA.MB}}{\mathrm{AB}} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}.$$

A et B sont deux points de la tangente au point M; α et β leurs plans focaux respectifs.