

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 437-440

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__437_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1571.

(1887, p. 582; 1917, p. 235.)

C_m^p désignant le nombre des combinaisons de m lettres p
à p , démontrer la formule

$$2^{2n} = C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^{n-1} + \dots + 2^k C_{2n-k}^{n-k} + \dots + 2^n.$$

(PELLERIN.)

Autre solution par M. H. DE MONTILLE, qui déduit de sa démonstration d'autres identités, par exemple celle-ci :

$$2^{2n} = C_{2n+1}^n + C_{2n}^{n-1} + 2C_{2n-2}^{n-2} + 2^2 C_{2n-4}^{n-3} + \dots \\ + 2^{n-2} C_{n+2}^1 + 2^{n-1}.$$

1761.

(1897, p. 148.)

Cinq droites quelconques sont données dans un plan. On mène une transversale par un point fixe et, sur cette droite, on prend un sixième point qui forme une involution avec les cinq points déterminés par les cinq droites données. Le lieu géométrique de ce sixième point, quand la transversale tourne autour de son pivot, est formé de cinq coniques. (DEWULF.)

SOLUTION

Par M. L. MALOUE.

Cet énoncé est erroné.

Soient 1, 2, 3, 4, 5 les cinq droites données, O le point fixe, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 les cinq points d'intersection des cinq droites avec une sécante D variable issue du point O, M un point de cette sécante tel que les trois couples $(M, M_1), (M_2, M_3), (M_4, M_5)$ forment une involution. Il est clair que le point M est unique sur la sécante. Le lieu de M est donc une unicursale Γ .

Pour trouver l'ordre de Γ , il faut chercher combien de fois cette courbe passe en O. Supposons que D soit tel que M soit confondu avec O. Il y a alors involution entre les trois couples $(O, M_1), (M_2, M_3), (M_4, M_5)$.

On a donc l'égalité entre rapports anharmoniques de points

$$(M_1 O M_2 M_4) = (O M_1 M_3 M_5) = (M_1 O M_5 M_3),$$

et par suite l'égalité entre rapports anharmoniques de faisceaux

$$A(M_1 O M_2 M_4) = B(M_1 O M_5 M_3),$$

en appelant A le point de rencontre de 2,4 et B le point de rencontre de 3,5. M_1 appartient donc au lieu défini par la relation précédente. Comme les deux faisceaux ont chacun

trois rayons fixes, ce lieu est une conique Γ' qui passe en A et B. Γ' rencontre Γ en deux points. Γ a donc un point double en O et c'est une cubique.

Cette cubique a été obtenue en associant les points M, M_1, \dots, M_5 dans un certain ordre. En faisant varier cet ordre de toutes les manières possibles, on trouve que le lieu complet se compose de 15 cubiques.

Autre solution, par M. H. DE MONTILLE.

4779.

(1897, p. 388; 1917, p. 356.)

La ligne OMN rencontre les lignes AB, AC en M et N, de telle sorte qu'on a $\overline{OM}^2 \cdot AN \cdot AC = \overline{ON}^2 \cdot AM \cdot MB$. Déterminer O.
(W.-J. GREENSTREET.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient x, y les coordonnées de O par rapport aux axes $\overline{ABx}, \overline{ACy}$, on a immédiatement

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{y}{x} \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}},$$

d'où

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{ON}^2} \frac{\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{AN \cdot BM}{AM \cdot AC} = \frac{BB_1}{AC},$$

B_1 désignant l'intersection de la parallèle à AC menée par B avec MN; soient B_2 l'intersection avec AC de la parallèle à AB_1 menée par B, D_1 l'intersection de la perpendiculaire à AC en A avec le cercle de diamètre CB_2 , on a

$$\frac{BB_1}{AC} = \frac{AB_2}{AC} = \frac{\overline{DB_2}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{y^2}{x^2},$$

formule qui détermine immédiatement deux droites AO_1, AO_2 , conjuguées harmoniques par rapport à AB, BC, dont l'intersection avec MN détermine les deux points O solutions du problème.

