

V. THÉBAULT

**Distance du centre de la sphère circonscrite
au centre de gravité du tétraèdre**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 424-426

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__424_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K¹13c]

**DISTANCE DU CENTRE DE LA SPHÈRE
CIRCONSCRITE AU CENTRE DE GRAVITÉ DU TÉTRAÈDRE ;**

PAR M. V. THÉBAULT.

1. Considérons un tétraèdre quelconque ABCD inscrit dans une sphère O et dont le centre de gravité est Γ . Ce point est situé à l'intersection des droites qui joignent les sommets A, B, C, D aux centres de gravité G_A, G_B, G_C, G_D des faces opposées. De plus, Γ divise chacune des droites AG_A, BG_B, CG_C, DG_D , dans le rapport

$$\frac{\Gamma G_A}{\Gamma A} = \frac{\Gamma G_B}{\Gamma B} = \frac{\Gamma G_C}{\Gamma C} = \frac{\Gamma G_D}{\Gamma D} = \frac{1}{3}.$$

LEMME. — *Dans un tétraèdre quelconque ABCD,*

on a

$$(1) \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 - \frac{1}{3} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2) = 3 \overline{DG_D}^2,$$

G_D étant le centre de gravité de la base ABC.

Car

$$\overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AG_D}^2 + \overline{BG_D}^2 + \overline{CG_D}^2 + 3 \overline{DG_D}^2$$

et

$$\overline{AG_D}^2 + \overline{BG_D}^2 + \overline{CG_D}^2 = \frac{1}{3} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

Considérons maintenant les tétraèdres OABC, OBCD, OCAD, OABD. La relation (1) appliquée à chacun d'eux donne, en ajoutant, R étant le rayon de la sphère O,

$$\sum 3 \overline{OG_A}^2 = 12 R^2 - \sum \frac{2}{3} \overline{AB}^2.$$

La relation de Stewart appliquée aux triangles OAG_A, OBG_B, OCG_C, ODG_D, donne aussi, par addition,

$$\sum 3 \overline{OG_A}^2 = 4 (4 \overline{OG}^2 - R^2) + \sum \frac{3}{4} \overline{AG_A}^2.$$

On en déduit, avec (1), cette relation entre les arêtes $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, la distance OG et le rayon R de la sphère circonscrite à un tétraèdre,

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{16} \right)$$

2. Les remarques suivantes apparaissent d'elles-mêmes.

La somme des carrés des arêtes des tétraèdres, inscrits dans une sphère et ayant un point donné pour centre de gravité, est constante.

Le lieu des centres de gravité des tétraèdres ins-

crits dans une sphère et tels que la somme des carrés de leurs arêtes soit constante, est une sphère concentrique à la sphère circonscrite.

Enfin, la somme des carrés des arêtes des tétraèdres inscrits dans une sphère donnée est maximum lorsque leur centre de gravité est au centre de la sphère circonscrite.

Dans un tel tétraèdre, les arêtes opposées sont égales.

On obtient ainsi une propriété de ces tétraèdres θ qu'il y a lieu d'ajouter à celles qui ont été réunies par M. J. Lemaire dans la solution de la question de Mathématiques élémentaires posée au Concours d'Agrégation en 1914 (*Nouvelles Annales*, p. 502) :

Parmi les tétraèdres inscrits dans une sphère donnée, ceux dont les arêtes opposées sont égales, sont tels que la somme des carrés de leurs arêtes soit maximum. Si a, b, c sont les arêtes, R le rayon de la sphère,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2.$$
