V. THÉBAULT

Distance du centre de la sphère circonscrite au centre de gravité du tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 424-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__424_1>

[K[1]13c]

DISTANCE DU CENTRE DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE AU CENTRE DE GRAVITÉ DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. V. THÉBAULT.

1. Considérons un tétraèdre quelconque ABCD inscrit dans une sphère O et dont le centre de gravité est Γ. Ce point est situé à l'intersection des droites qui joignent les sommets A, B, C, D aux centres de gravité G_A, G_B, G_C, G_D des faces opposées. De plus, Γ divise chacune des droites AG_A, BG_B, CG_C, DG_D, dans le rapport

$$\frac{\Gamma G_A}{\Gamma A} = \frac{\Gamma G_B}{\Gamma B} = \frac{\Gamma G_C}{\Gamma C} = \frac{\Gamma G_D}{\Gamma D} = \frac{1}{3}.$$

LEMME. — *Dans un tétraèdre quelconque* ABCD, *on a*

$$(1)\quad \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 - \frac{1}{3}\left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2\right) = 3\,\overline{DG}_D^2,$$

G_D *étant le centre de gravité de la base* ABC.

Car

$$\overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AG}_D^2 + \overline{BG}_D^2 + \overline{CG}_D^2 + 3\,\overline{DG}_D^2$$

et

$$\overline{AG}_D^2 + \overline{BG}_D^2 + \overline{CG}_D^2 = \frac{1}{3}\left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2\right).$$

Considérons maintenant les tétraèdres OABC, OBCD, OCAD, OABD. La relation (1) appliquée à chacun d'eux donne, en ajoutant, R étant le rayon de la sphère O,

$$\sum 3\,\overline{OG}_A^2 = 12\,R^2 - \sum \frac{2}{3}\,\overline{AB}^2.$$

La relation de Stewart appliquée aux triangles OAG_A, OBG_B, OCG_C, ODG_D, donne aussi, par addition,

$$\sum 3\,\overline{OG}_A^2 = 4\left(4\,\overline{O\Gamma}^2 - R^2\right) + \sum \frac{3}{4}\,\overline{AG}_A^2.$$

On en déduit, avec (1), cette relation entre les arêtes a, b, c, α, β, γ, la distance $O\Gamma$ et le rayon R de la sphère circonscrite à un tétraèdre,

$$\overline{O\Gamma}^2 = R^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{16}\right)$$

2. Les remarques suivantes apparaissent d'elles-mêmes.

La somme des carrés des arêtes des tétraèdres, inscrits dans une sphère et ayant un point donné pour centre de gravité, est constante.

Le lieu des centres de gravité des tétraèdres ins-

crits dans une sphère et tels que la somme des carrés de leurs arêtes soit constante, est une sphère concentrique à la sphère circonscrite.

Enfin, *la somme des carrés des arêtes des tétraèdres inscrits dans une sphère donnée est maximum lorsque leur centre de gravité est au centre de la sphère circonscrite.*

Dans un tel tétraèdre, les arêtes opposées sont égales.

On obtient ainsi une propriété de ces tétraèdres θ qu'il y a lieu d'ajouter à celles qui ont été réunies par M. J. Lemaire dans la solution de la question de Mathématiques élémentaires posée au Concours d'Agrégation en 1914 (*Nouvelles Annales*, p. 502) :

Parmi les tétraèdres inscrits dans une sphère donnée, ceux dont les arêtes opposées sont égales, sont tels que la somme des carrés de leurs arêtes soit maximum. Si a, b, c *sont les arêtes,* R *le rayon de la sphère,*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2.$$